# 閉空間系のふく射伝熱
*Radiative Heat Transfer in Enclosed System*

富村　寿夫（九州大学）
*Toshio TOMIMURA (Kyushu University)*

## 1. はじめに

ふく射伝熱に関連して「教科書で触れられることが少ないけれども関連現象の本質を理解する上で重要な事項，あるいはどの教科書でも通り一遍の記述はなされているものの今一つしっくりこない事項」について One-Point 解説をする機会を与えて頂いた．このような事項は十人十色で大きな個人差があることとは思うが，今回は本企画の趣旨から，読者層は学部あるいは大学院レベルの方々と想定した上で，教科書でよく見かける閉空間系のふく射伝熱の中から 2 つの事項について整理と解説を行ってみることにする．

## 2. 多重反射を含んだ変数 外来照射量 $G$ と射度 $J$ について

灰色体系のふく射伝熱の解法の一つに Poljak による Saldo 法(Net Radiation Method)がある．この方法では，図 1 に示すように多重反射を含んだ変数として外来照射量 $G$ [W/m$^2$]と射度 $J$ [W/m$^2$]が導入される．そのお陰で黒体系の場合と同様な取扱いをすることが可能となり，ふく射伝熱の解析が極めて簡単になる．しかし，この場合，「外来照射量 $G$ と射度 $J$ の中に多重反射の成分が一体どのような形で含まれているのか」ということについて具体的な例で理解しておきたくなる．これが第一番目の「のどの小骨」である．

折に触れ手元にあるテキスト[1-20]で調べた限りでは，残念ながらその答えを見つけることはできなかった．そうなると自身で何らかの答えを見つけざるを得ないのであるが，例えば $n$ 個の表面で囲まれた灰色体閉空間系での多重反射を逐一追跡することなどは，まず論外である．そこで多重反射が何とか追跡可能な系として図 2 に示すような無限平行平板を取り上げ，そこでの正味のふく射エネルギー交換を考えてみることにする．

まず，非透過性の灰色面 1 と 2 で構成される無限平行平板系(形態係数 $F_{12}=F_{21}=1$)に関し，Kirchhoff の法則から，吸収率 $a$ は放射率$\varepsilon$に等しく，反射率 $\rho$ は $1-a$ すなわち $1-\varepsilon$ で与えられるとする（注：Kirchhoff の法則に関して上記のような簡単な書き方をしたが，この法則の適用には注意が必

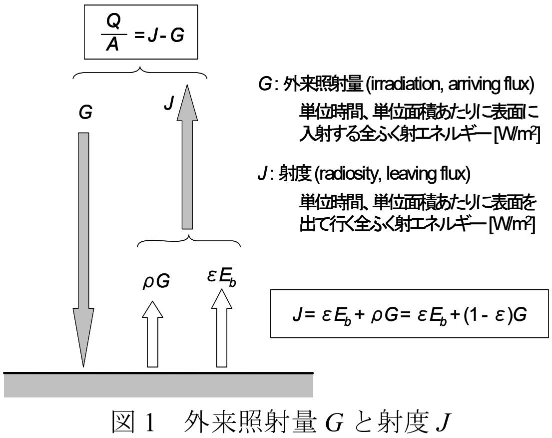


図 1　外来照射量 $G$ と射度 $J$

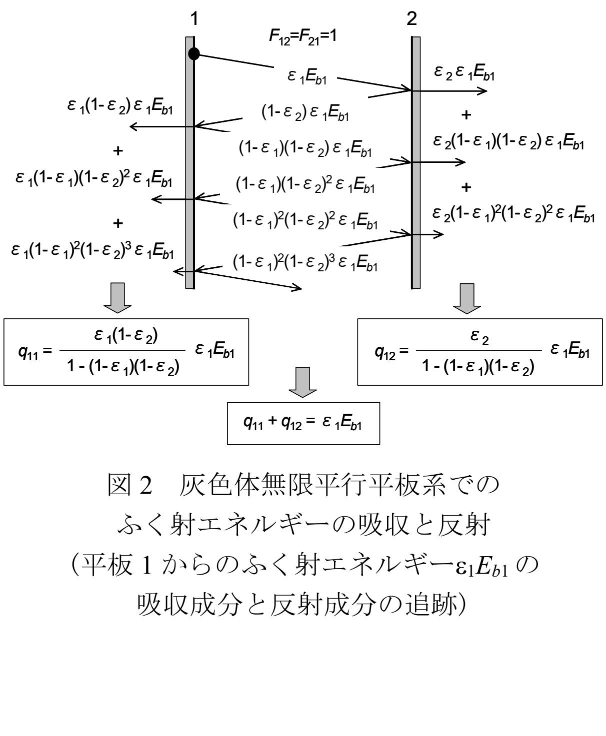


図 2　灰色体無限平行平板系での
ふく射エネルギーの吸収と反射
（平板 1 からのふく射エネルギー$\varepsilon_1 E_{b1}$の
吸収成分と反射成分の追跡）

要である[21]．ここでは吸収率などの用語の前に，具体的な例として「全半球」という接頭語があるものとする）．黒体の全放射能を $E_b(=\sigma T^4$ [W/m$^2$]，ここで$\sigma$は Stefan-Boltzmann 定数，$T$ は絶対温度 [K])とすると，図 2 に示すように，放射率$\varepsilon_1$の平板 1 から放射されたふく射エネルギー$\varepsilon_1 E_{b1}$は平板 2 でその一部$\varepsilon_2\varepsilon_1 E_{b1}$が吸収され，残りの$(1-\varepsilon_2)\varepsilon_1 E_{b1}$は反射され再び平板 1 に入射する．その後は図に示した吸収と反射を繰り返し，最終的には平板 1 で

$$q_{11} = \frac{\varepsilon_1(1-\varepsilon_2)}{1-(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)}\varepsilon_1 E_{b1} \tag{1}$$

が吸収され，平板 2 では

$$q_{12} = \frac{\varepsilon_2}{1-(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)}\varepsilon_1 E_{b1} \tag{2}$$

が吸収される．そして，$q_{11}$ [W/m$^2$]と $q_{12}$ [W/m$^2$]の和は平板 1 から最初に放射されたふく射エネルギー$\varepsilon_1 E_{b1}$に等しく，

$$q_{11} + q_{12} = \varepsilon_1 E_{b1} \tag{3}$$

となる．同様にして，平板 2 から放射されたふく射エネルギー$\varepsilon_2 E_{b2}$は，最終的には平板 1 で

$$q_{21} = \frac{\varepsilon_1}{1-(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)}\varepsilon_2 E_{b2} \tag{4}$$

が吸収され，平板 2 では

$$q_{22} = \frac{\varepsilon_2(1-\varepsilon_1)}{1-(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)}\varepsilon_2 E_{b2} \tag{5}$$

が吸収される．そして，それらの和は

$$q_{21} + q_{22} = \varepsilon_2 E_{b2} \tag{6}$$

となる．以上の内容を纏めて示すと図 3 のようになり，非透過性の灰色面で構成される無限平行平板系における正味のふく射エネルギーの交換量 $q_n$ は，周知の次式で与えられる．

$$q_n = q_{12} - q_{21} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1} \tag{7}$$

一方，同じ系を図 4 を参照し，外来照射量 $G$ と射度 $J$ を用いて解析すると，

$$J_1 = \varepsilon_1 E_{b1} + (1-\varepsilon_1)G_1 \tag{8}$$

$$J_2 = \varepsilon_2 E_{b2} + (1-\varepsilon_2)G_2 \tag{9}$$

$$G_1 = J_2 \tag{10}$$

$$G_2 = J_1 \tag{11}$$

から，以下の関係が得られる．

$$J_1 = G_2 = \frac{\varepsilon_1 E_{b1} + (1-\varepsilon_1)\varepsilon_2 E_{b2}}{1-(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)} \tag{12}$$

$$J_2 = G_1 = \frac{(1-\varepsilon_2)\varepsilon_1 E_{b1} + \varepsilon_2 E_{b2}}{1-(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)} \tag{13}$$

従って，正味のふく射エネルギーの交換量 $q_n$ は，

$$q_n = J_1 - G_1 = G_2 - J_2 = J_1 - J_2 = G_2 - G_1 \tag{14}$$

に式(12)，(13)を代入することにより

$$q_n = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1} \tag{15}$$

となる．上式は，確かに多重反射を逐一追跡して得られた式(7)と一致している．

そこで，式(12)，(13)を式(1)，(2)，(4)，(5)の関係

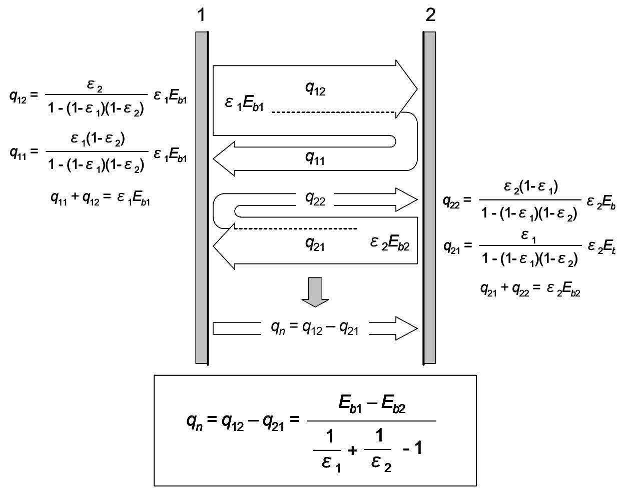


図 3　灰色体無限平行平板系での
正味のふく射エネルギー交換

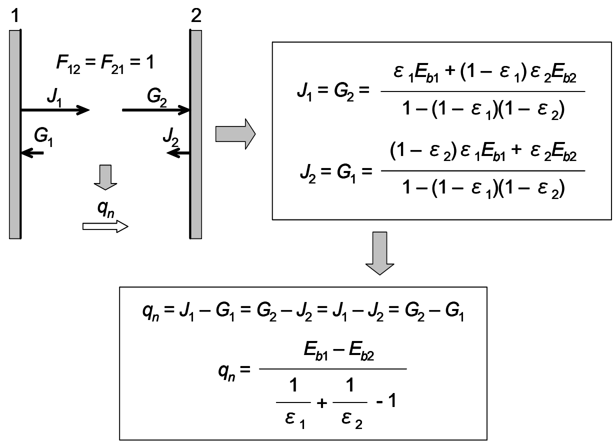


図 4　外来照射量 $G$ と射度 $J$ を用いた
灰色体無限平行平板系のふく射伝熱解析

を用いて $q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22}$ で表わしてみると，

$$J_1 = G_2 = \frac{q_{12}}{\varepsilon_2} + \frac{q_{22}}{\varepsilon_2} \quad \therefore \varepsilon_2 J_1 = \varepsilon_2 G_2 = q_{12} + q_{22} \quad (16)$$

$$J_2 = G_1 = \frac{q_{11}}{\varepsilon_1} + \frac{q_{21}}{\varepsilon_1} \quad \therefore \varepsilon_1 J_2 = \varepsilon_1 G_1 = q_{11} + q_{21} \quad (17)$$

となっている．すなわち，図 3 と図 4 を参照すると，式(16)から，平板 2 に入射する外来照射量 $G_2$ にその吸収率 $a_2(=\varepsilon_2)$を掛けた$\varepsilon_2 G_2$は，平板 2 により吸収されるふく射エネルギー成分 $q_{12}$ と $q_{22}$ で構成されていることがわかる．同様に，式(17)から，平板 1 に入射する外来照射量 $G_1$ にその吸収率 $a_1(=\varepsilon_1)$を掛けた$\varepsilon_1 G_1$は，平板 1 により吸収されるふく射エネルギー成分 $q_{11}$ と $q_{21}$ で構成されている．

また，別の切り口から見てみるために，式(14)の $q_n=J_1-G_1$ に式(8)を代入すると，

$$\begin{aligned} q_n &= J_1 - G_1 = \varepsilon_1 E_{b1} - \varepsilon_1 G_1 \\ &\{= (q_{11}+q_{12}) - (q_{11}+q_{21}) = q_{12} - q_{21}\} \end{aligned} \quad (18)$$

となっており，正味のふく射エネルギーの交換量 $q_n$ は平板 1 により放射されるふく射エネルギー $\varepsilon_1 E_{b1}(=q_{12}+q_{11})$と吸収される全てのふく射エネルギー$\varepsilon_1 G_1(=q_{11}+q_{21})$の差に等しい．これはまた，式(14)の $q_n=G_2-J_2$ に式(9)を代入して得られる

$$\begin{aligned} q_n &= G_2 - J_2 = \varepsilon_2 G_2 - \varepsilon_2 E_{b2} \\ &\{= (q_{12}+q_{22}) - (q_{21}+q_{22}) = q_{12} - q_{21}\} \end{aligned} \quad (19)$$

から，$q_n$ は平板 2 により吸収される全てのふく射エネルギー$\varepsilon_2 G_2(=q_{12}+q_{22})$と放射されるふく射エネルギー$\varepsilon_2 E_{b2}(=q_{21}+q_{22})$ の差に等しいことがわかる．

## 3. ふく射伝熱解析に必要な形態係数の数について

第二番目の「のどの小骨」として，閉空間系のふく射伝熱解析において必要となる形態係数の数について見てみることにする．

教科書でよく説明されているように，$n$ 個の非透過性の表面で囲まれた灰色体閉空間系におけるふく射伝熱の問題は，$A_i$ を表面 $i$ の面積[$m^2$]，$Q_i(=A_i q_i)$を表面 $i$ と他の全ての表面との間の正味のふく射エネルギーの交換量[W]，$F_{ij}$ を形態係数とすると，

$$J_i = \varepsilon_i E_{bi} + (1-\varepsilon_i)\sum_{j=1}^{n} F_{ij} J_j \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \quad (20)$$

あるいは

$$\begin{aligned} Q_i &= \frac{\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i}(E_{bi} - J_i)A_i \\ &= \varepsilon_i E_{bi} A_i - \varepsilon_i \left( \sum_{j=1}^{n} F_{ij} J_j \right) A_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \end{aligned} \quad (21)$$

を用いて解析できる．そして，例えば[10]，

(a) 表面の温度 $T_i$ すなわち $E_{bi}(=\sigma T_i^4)$が全て既知の場合には，各表面の射度 $J_i$ を未知量とする $n$ 元連立一次方程式(20)を用いて $J_i$ を求めれば，式(21)により各表面の正味のふく射エネルギーの交換量 $Q_i$ を求めることができる．

また，別の例[10]として，

(b) 総計 $2n$ 個の $T_i$ と $Q_i$ のうち $n$ 個に対する値が与えられれば，残りの $n$ 個の未知量は，これと $n$ 個の射度 $J_i$ を未知量とする $2n$ 元連立一次方程式(20)および式(21)を解くことにより決定できる．

これらの例では，総数 $n^2$ 個の形態係数 $F_{ij}$ は全て既知であることを大前提としている．そうすると「相互関係と総和関係から幾つかの形態係数は代数的に決められるはずだが，最終的には一体幾つの形態係数をその定義式から求めなければならないのか」，あるいは別の言い方をすれば「一体幾つの形態係数を予めその定義式から求めておけば，残りは相互関係と総和関係から代数的に求められるのか」ということになる．この問いに対しては明確な答え[4, 6, 7, 10, 18]があり，例えば，「$n$ 個の表面で囲まれた閉空間系において，互いに見ることのできない 2 表面の組合せの数が $p$ 個、自分自身を見ない表面の数が $r$ 個だけあるとすれば，ふく射エネルギー交換の式にあらわれる形態係数の数は$(n^2-2p-r)$個となる．しかし，形態係数に対する一般法則を用いれば，相互関係により$[n(n-1)/2-p]$個，総和関係により $n$ 個，あわせて$[(n^2+n)/2-p]$個の条件式が得られる．したがって形態係数の総数のうち$[n(n-1)/2-(p+r)]$個の値を知れば，残りは条件式より代数的に求められる」と説明されている．これはこれで確かに正しいのではあるが，この場合も、やはり具体的な例をもとに，できれば視覚的に理解しておきたくなる．そこで，例えば図 5 に示した 3 つの系を例として，上式の導出過程をフォローしてみることにする．

まず Case 1～3 に対し，形態係数 $F_{ij}$ をマトリッ

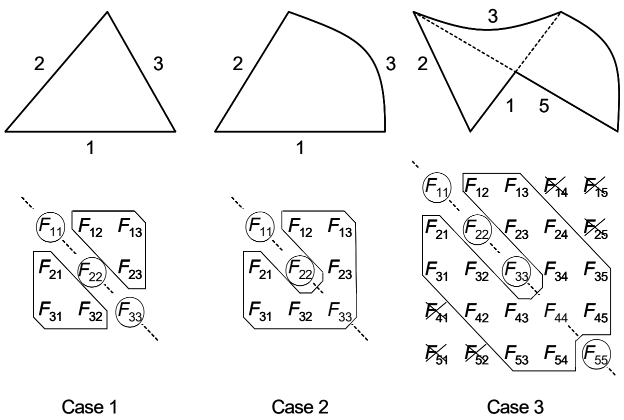


図 5 閉空間系の具体例と形態係数 $F_{ij}$

表 1 ふく射エネルギー交換の式にあらわれる形態係数の数

ふく射エネルギー交換の式にあらわれる形態係数の数

| | $n$ | $n^2$ | $2p$ | $r$ | $n^2$ - $2p$ - $r$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Case 1 | 3 | 9 | 2×0 = 0 | 3 | 9 - 0 - 3 = 6 |
| Case 2 | 3 | 9 | 2×0 = 0 | 2 | 9 - 0 - 2 = 7 |
| Case 3 | 5 | 25 | 2×3 = 6 | 4 | 25 - 6 - 4 = 15 |

$n$ : 表面の数　　$n^2$ : 形態係数の総数

$p$ : 互いに見ることのできない表面、すなわち $F_{ij} = F_{ji} = 0$ となる表面の組合せの数

$r$ : 自分自身を見ない、すなわち自己形態係数が $F_{ii} = 0$ となる表面の数

表 2 総和関係と相互関係の式の総数

相互関係の式の数

{任意の2表面の組合せの数} − {$F_{ij} = F_{ji} = 0$ となる表面の組合せの数}

| | $n$ | $p$ | ${}_nC_2 - p = \dfrac{n(n-1)}{2} - p$ | $n + \dfrac{n(n-1)}{2} - p$ |
|---|---|---|---|---|
| Case 1 | 3 | 0 | 3 - 0 = 3 | 3 + 3 = 6 |
| Case 2 | 3 | 0 | 3 - 0 = 3 | 3 + 3 = 6 |
| Case 3 | 5 | 3 | 10 - 3 = 7 | 5 + 7 = 12 |

総和関係の式の数　　総和関係と相互関係の式の総数

クス状に配置すると，自己形態係数 $F_{ii}$ は対角線上に並び，○で囲んだ成分はその物理的な意味から 0 となる．また Case 3 の×を付した成分は互いに見ることのできない 2 表面の組合せでありこれも 0 となる．そして，実線で囲んだ残りの成分が「ふく射エネルギー交換の式にあらわれる形態係数」となることが確認できる．以上を纏めて示すと表

表 3 定義式から求めるべき形態係数の数

ふく射熱交換の式にあらわれる形態係数の数　　総和関係と相互関係の式の総数

| | $n^2 - 2p - r$ | $n + \dfrac{n(n-1)}{2} - p$ |
|---|---|---|
| Case 1 | 6 | 6 |
| Case 2 | 7 | 6 |
| Case 3 | 15 | 12 |

定義式から求めるべき形態係数の数

| | $(n^2 - 2p - r) - \left\{ n + \dfrac{n(n-1)}{2} - p \right\} = \dfrac{n(n-1)}{2} - (r + p)$ |
|---|---|
| Case 1 | 6 - 6 = 0 |
| Case 2 | 7 - 6 = 1 |
| Case 3 | 15 - 12 = 3 |

1 のようになる．

次に，次式で与えられる相互関係，

$$A_i F_{ij} = A_j F_{ji} \tag{22}$$

および総和関係，

$$F_{i1} + F_{i2} + \cdots + F_{ii} + \cdots + F_{in} = \sum_{j=1}^{n} F_{ij} = 1 \tag{23}$$

から，それぞれの系に対して適用可能な総和関係と相互関係の式の総数は表 2 のようになる．すなわち，総和関係の式は表面の数と等しく $n$ 個であるのに対し，相互関係の式に関しては，任意の 2 表面の組合せの数 ${}_nC_2$ から互いに見ることのできない 2 表面の組合せの数 $p$ を差し引いておく必要がある．この間の事情は図 5 により確認できる．

以上から，表 3 に示すように，最終的な未知数の数は「ふく射エネルギー交換の式にあらわれる形態係数の数」から「総和関係と相互関係の式の総数」を引いた残りとなり，これが「定義式から求めるべき形態係数の数」となることが理解できる．なお，その際，ふく射エネルギー交換の式にあらわれる$(n^2-2p-r)$個の形態係数の中から，求め易い形態係数を$[n(n-1)/2-(p+r)]$個だけ選んで計算すればよいという自由度も残されている．

## 4. おわりに

ふく射伝熱に関して，今一つしっくりこないと感じていた事項について One-Point 解説をさせて頂いた．私自身はこれでなんとなく納得した感じ

にはなっているのだが，読者の皆様に対しては逆に「のどの小骨」を増やしてしまったのではと危惧している．その節はどうかご容赦願いたい．

本解説に関し，京都大学・牧野俊郎教授に無理をお願いし論旨や用語のチェックをして頂いた．短時間で非常に詳細かつ貴重なコメントをお寄せ頂いた上に，Texas 大学・Howell 教授の Web サイト http://www.me.utexas.edu/~howell/に形態係数に関する一覧 (A CATALOG OF RADIATION HEAT TRANSFER CONFIGURATION FACTORS，このサイトにはテキスト[19]の Appendix B に掲載されている形態係数 173 例をはるかに超える 299 例が系統立てて整理されており，非常に有用な情報が提供されている) が公開されていることもお教えいただいた．ここに記して謝意を表します．

## 参考テキストと文献

[1] 相原 利雄, 機械工学選書 伝熱工学, 株式会社 裳華房，(2003).

[2] 粟野 誠一，葛岡 常雄 編，伝熱工学，丸善株式会社，(1962).

[3] 一色 尚次，北山 直方 共著，最新機械工学シリーズ 7 伝熱工学，森北出版株式会社，(1995).

[4] 甲藤 好郎, 伝熱概論, 株式会社 養賢堂, (1974).

[5] 小林 清志，飯田 嘉宏 共著，新版 移動論，株式会社 朝倉書店，(1996).

[6] 庄司 正弘，東京大学機械工学⑥ 伝熱工学，東京大学出版会，(1995).

[7] 杉山 幸男，化学工業工学 熱工学総論，地球出版，(1969).

[8] 関　信弘 編, 伝熱工学, 森北出版株式会社, (2002).

[9] 武山 斌郎，大谷 茂盛，相原 利雄 共著，大学講義 伝熱工学，丸善株式会社，(1983).

[10] 西川 兼康，藤田 恭伸 共著，機械工学基礎講座 伝熱学，理工学社，(1982).

[11] 望月 貞成，村田　章 共著，理工学基礎シリーズ 伝熱工学の基礎，日新出版株式会社，(2003).

[12] 横堀　進，久我　修 共訳，ギート 基礎伝熱工学，丸善株式会社，(1975).

[13] 吉田　駿，伝熱学の基礎，理工学社，(1999).

[14] R. B. Bird, W. E. Stewart, and E. N. Lightfoot, TRANSPORT PHENOMENA, Wiley International Edition, (1960).

[15] J. P. Holman, HEAT TRANSFER Ninth Edition, McGRAW-HILL, (2002).

[16] M. Kaviany, PRINCIPLES OF HEAT TRANSFER, John Wiley & Sons, Inc. (2002).

[17] M. F. Modest, RADIATIVE HEAT TRANSFER, McGRAW-HILL, (1993).

[18] M. Necati Őzişik, BASIC HEAT TRANSFER, McGRAW-HILL, (1981).

[19] R. Siegel and J. R. Howell, THERMAL RADIATION HEAT TRANSFER, McGRAW-HILL, (1972).

[20] E. M. Sparrow and R. D. Cess, RADIATION HEAT TRANSFER, McGRAW-HILL, (1978).

[21] 牧野 俊郎，若林 英信，伝熱，**42**-177, (2003), 18-21.