エネルギー式を巡る
Around the Energy Equations

田川 正人（名古屋工業大学）
Masato TAGAWA (Nagoya Institute of Technology)

1. は じ め に

伝熱研究会創立 20 周年記念特集 [1] の中に，九州大学 西川兼康先生の『伝熱雑感』という文章がある。そこには,「私の周囲に関して伝熱シンポジウムで思い出されることの一つは…」で始まる段落があり，エネルギー式の正しい使い方 (表現) について論争があったことが記されている。密度 ρ や定圧比熱 c_p など物性値が変化する系において，九大グループがエネルギー式の対流項を $\rho u c_p(\partial T/\partial x) + \rho v c_p(\partial T/\partial y)$ と表して計算したことに対して，会場からそれは近似計算であって正しくは $\rho u(\partial c_p T/\partial x) + \rho v(\partial c_p T/\partial y)$ で計算すべきとの批判があったことが紹介されている。西川先生はこの批判が質問者の誤解によるものであり，方程式の物理的意義を忘れることの危険性について述べられている。

たしかに，非圧縮性流体のエネルギー式として $DT/Dt = a(\partial^2 T/\partial x_k \partial x_k)$ を常用していると，物理を離れて方程式そのものが一人歩きし，そこに到るプロセス (式の前提条件や適用範囲など) に対する意識は薄れていく。原点に立ち返ることは何時も重要である。森・土方の著書 [2] では，次式に示すエネルギー式の二通りの表現 (比内部エネルギー e および比エンタルピ h に基づく二つの式) が示されており，それぞれの左辺第 2 項を省略した場合には，どちらがより正確なのかが議論されている。

$$\rho \frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \Phi \tag{1}$$

$$\rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \Phi \tag{2}$$

本特集を企画された吉田英生先生から，上記のような基本的事項について問題意識をもつことの重要性を示唆された上で,「エネルギー式の種々の表現と正しい使い方」について何か書くようにと課題を与えられた。正しい使い方を書くだけの自信はなく，適任の方の名前がすぐに幾人も思い浮かんだので辞退しようかと大いに迷ったが，結果的には，記事のタイトルを標記のように設定した上でこの課題に取り組むことになった。

以下では，エネルギー式としてよく使われる表現に至る過程をたどる。また，自然対流や燃焼を取り扱う場合に問題となる事柄についても紹介したい。

2. エネルギー式の種々の表現

この節では，流体中の熱移動現象を記述するエネルギー式の表現について，基本形と前提条件についてまとめてみる。以下では，対象を単相のニュートン流体 (純物質) に限定する。また，速度勾配や温度勾配が大きくなく，種々の状態量の間には平衡系の場合と同様の熱力学的関係が成立するものとする。また，簡単のためにデカルト座標系 (Cartesian coordinates) を用いて方程式を記述し，添字について総和規約を適用する。

2·1 内部エネルギー e で表示されるエネルギー式

流体中の熱移動現象の解析では，強制対流のように熱輸送が流体運動に対して受動的であるか，自然対流のように能動的であるかという差はあるものの，エネルギー式を以下に示す連続の式および運動方程式と組み合わせる。密度 ρ が変化する場合，連続の式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_k}{\partial x_k} = \frac{D\rho}{Dt} + \rho\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) = 0 \tag{3}$$

ここで u_k は速度ベクトルの k 方向成分であり，D/Dt は次式の実質微分を表す。

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \tag{4}$$

式 (3) から，密度 ρ と比体積 v について次の関係式を得る。

$$\left.\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} &= -\rho\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right), \\ \frac{Dv}{Dt} &= \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

密度 ρ が一定の流体 (非圧縮性流体) に対する連続の式は，式 (5) から $\partial u_k/\partial x_k = 0$ となる。一方，運動方程式は

$$\rho\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial u_\ell}{\partial x_\ell}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\zeta\frac{\partial u_\ell}{\partial x_\ell}\right) + \rho X_i \tag{6}$$

で与えられる。ここで，p は圧力，ρX_i は体積力を表す。通常は，ストークスの仮説により体積粘性係数 ζ を 0 とする。

運動方程式と組み合わされるエネルギー式としては温度 T で表示された次式が広く用いられる。

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\lambda}{\rho c_p}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_k}\right) \tag{7}$$

ここで，λ, c_p はそれぞれ熱伝導率，定圧比熱を表す。温度伝導率 (熱拡散係数) $a \equiv \lambda/\rho c_p$ を用いて $DT/Dt = a(\partial^2 T/\partial x_k \partial x_k)$ と表示されることも多い。式 (7) のエネルギー式はいくつかの仮定のもとに導出されたものである。本論の目的の一つはエネルギー式の代表ともいえる式 (7) に至る過程をたどることである。

比内部エネルギー e (簡単のために，以下では内部エネルギーとよぶ) についてのエネルギー式は，熱伝導がフーリエの法則で記述されるとすれば次式となる。

$$\rho\frac{De}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x_k}\right) - p\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) + \Phi \tag{8}$$

式 (8) は内部エネルギー e と運動エネルギー $k = u_i u_i/2$ の和 $e+k$ のエネルギー収支を求めた後に，それから k の寄与分を差し引くことで得られる [3] [4]。式 (8) の Φ は流体摩擦によって力学的エネルギーが散逸して熱に変換する量を表し，次式で与えられる [5]。

$$\Phi = \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)^2 + \zeta\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)^2 \tag{9}$$

式 (9) の 1 行目の τ_{ij} は次の粘性応力テンソルを表す。

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right) + \zeta\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij} \tag{10}$$

体積粘性係数を $\zeta = 0$ として，Φ をデカルト座標系で具体的に記述すると次式のようになる [3]。

$$\Phi = \mu\left[2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2\right] \tag{11}$$

式 (8) を次に示すエントロピ s の収支式 [5] [6] から導くこともできる。

$$\rho T\frac{Ds}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x_k}\right) + \Phi \tag{12}$$

式 (12) の右辺第 1 項と第 2 項はそれぞれ熱伝導と流体摩擦による熱の寄与を表す*。エントロピは状態量であるから，ある過程におけるエントロピ変化量 Δs はその変化の経路によらない。したがって，熱伝導や摩擦といった不可逆過程の結果として生じるエントロピ変化についても，他の二つの物理量 (ここでは e と比体積 v) の可逆過程を通して次の熱力学関係式から計算できる。

$$T\mathrm{d}s = \mathrm{d}e + p\mathrm{d}v \tag{13}$$

式 (13) の両辺を微小時間 $\mathrm{d}t$ で割り，時間微分 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ を実質微分 D/Dt に変換することによって次の関係を得る。

$$T\frac{Ds}{Dt} = \frac{De}{Dt} + p\frac{Dv}{Dt} \tag{14}$$

式 (14) を式 (12) の左辺に代入し，式 (5) の第 2 式を利用すれば，式 (12) は式 (8) に帰着する。また，式 (8) を式 (5) の第 1 式により書き換えることで式 (1) を得る。

2·2 エンタルピ h および温度 T で表示されるエネルギー式 エネルギー式を比エンタルピ h (以下では単にエンタルピとよぶ) で表すことも多い。内部エネルギー e は h と次式の関係にある。

$$e = h - pv \tag{15}$$

式 (15) の両辺を時間 t で微分し，実質微分に変換すると

$$\frac{De}{Dt} = \frac{Dh}{Dt} - p\frac{Dv}{Dt} - v\frac{Dp}{Dt} \tag{16}$$

*右辺は，不可逆過程によるエントロピの生成 $\lambda|\mathrm{grad}\,T|^2/T^2 + \Phi/T$ と熱の移動に伴って生じるエントロピの変化 $\mathrm{div}[(\lambda \mathrm{grad}\,T)/T]$ からなる [5] [7]。

となる。これを式 (8) の左辺に代入し，式 (5) の第 2 式を用いることにより式 (2) を得る。

次に，温度 T でエネルギー式を表すことを考えてみる。内部エネルギーの変化 $\mathrm{d}e$ と温度の変化 $\mathrm{d}T$ の間には次の熱力学的関係が成立する。

$$\mathrm{d}e = c_v \mathrm{d}T + \left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - p\right]\mathrm{d}v \tag{17}$$

式 (17) の両辺を $\mathrm{d}t$ で割って $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ を D/Dt に変換し，式 (5) を用いると次式を得る。

$$\begin{aligned}\rho\frac{De}{Dt} &= \rho c_v\frac{DT}{Dt} + \rho\left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - p\right]\frac{Dv}{Dt}\\ &= \rho c_v\frac{DT}{Dt} + \left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - p\right]\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\end{aligned} \tag{18}$$

この結果を式 (8) に代入することによって，温度 T と定容比熱 c_v で表されるエネルギー式となる。

$$\begin{aligned}\rho c_v\frac{DT}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x_k}\right)\\ &\quad -T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \Phi\end{aligned} \tag{19}$$

同様に，エンタルピの変化 $\mathrm{d}h$ と $\mathrm{d}T$ の間には次の関係がある。

$$\mathrm{d}h = c_p\mathrm{d}T + \left[v - T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\right]\mathrm{d}p \tag{20}$$

式 (20) によれば，$\mathrm{d}e$ は c_p を通して $\mathrm{d}T$ と次の熱力学的関係にある。

$$\begin{aligned}\mathrm{d}e &= \mathrm{d}h - p\mathrm{d}v - v\mathrm{d}p\\ &= c_p\mathrm{d}T - T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\mathrm{d}p - p\mathrm{d}v\end{aligned} \tag{21}$$

式 (21) から De/Dt は $c_p(DT/Dt)$ を含む次式で表される。

$$\begin{aligned}\frac{De}{Dt} &= c_p\frac{DT}{Dt} - T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\frac{Dp}{Dt} - p\frac{Dv}{Dt}\\ &= c_p\frac{DT}{Dt} - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \ln v}{\partial \ln T}\right)_p\frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\end{aligned} \tag{22}$$

この結果を式 (8) に代入すれば温度 T と定圧比熱 c_p で表されたエネルギー式が次のように得られる [3]。

$$\begin{aligned}\rho c_p\frac{DT}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x_k}\right)\\ &\quad + \left(\frac{\partial \ln v}{\partial \ln T}\right)_p\frac{Dp}{Dt} + \Phi\end{aligned} \tag{23}$$

式 (23) の右辺第 2 項は次式で定義される体膨張係数

$$\beta = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \tag{24}$$

を用いれば次のように書き換えることができる。

$$\rho c_p\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x_k}\right) + \beta T\frac{Dp}{Dt} + \Phi \tag{25}$$

体膨張係数 β は，理想気体では $\beta = 1/T$ となるから，温度 20 °C で $\beta = 3.4 \times 10^{-3}$ [K^{-1}] となる。一方，同じ温度の水の場合には $\beta = 2.1 \times 10^{-4}$ [K^{-1}] (理科年表) であり，気体と比較すると一桁小さい。$\rho =$ const. ($v =$ const.) の非圧縮性流体では $\beta = 0$ とみなせる。したがって，通常の液体の場合には Dp/Dt を含む項の寄与は無視できる [6]。しかし，気体の場合には無視できない場合がある。これについては次節で述べる。

以上では，内部エネルギー e，エンタルピ h，温度 T に基づくエネルギー式を扱ってきた。一方，先述のように e や h に流体の運動エネルギー k $(= u_k u_k/2)$ を加えた全エネルギー e_t $(\equiv e + k)$ や全エンタルピ h_t $(\equiv h + k)$ でエネルギー式を表示することがある。たとえば，全エンタルピ h_t に対するエネルギー式は次のようになる [4] [8]。

$$\rho\frac{Dh_t}{Dt} - \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x_k}\right) + \frac{\partial(u_i\tau_{ji})}{\partial x_j} + \rho u_k X_k \tag{26}$$

定常な系では，式 (26) の左辺第 2 項 $\partial p/\partial t$ は 0 となる。加えて，流速が遅い場合には $h_t \simeq h$ が成立し，また右辺第 2 項は無視される。

3. エネルギー式の取り扱い

ここではいろいろなケースを想定して，エネルギー式の取り扱いについて検討する。

3·1　対流項の表現　式 (23) にあるように対流項の正しい表現は $\rho c_p(DT/Dt)$ である。比熱一定を仮定する狭義の理想気体の場合では，定圧比熱 c_p を実質微分の中にいれても何ら差は生じない。しかし，物性値が変化する流体の場合には対流項の取り扱いに注意が必要である。式 (23) の左辺は，連続の式 (3) を利用して ρ と c_p を実質微分の中に入れれば次式となる [3]。

$$\rho c_p\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t} + \frac{\partial(u_k\rho c_p T)}{\partial x_k} - \rho T\frac{Dc_p}{Dt} \tag{27}$$

あるいは，式 (23) の左辺は次のように書くこともできる。

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \rho \frac{\partial (c_p T)}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial (c_p T)}{\partial x_k} - \rho T \frac{D c_p}{Dt} \tag{28}$$

つまり，定圧比熱 c_p の変化が大きい場合には式 (28) の右辺第 3 項を無視することはできない。したがって，最初に述べたように，$\rho c_p u_k(\partial T/\partial x_k) \neq \rho u_k(\partial c_p T/\partial x_k)$ となって，後者は c_p の変化が小さい場合の近似的な表現になる。空気の c_p は，大気圧下の 300 K で 1005.7 J/(kg·K)，2000 K で 1338 J/ (kg·K) であり [4]，かなり大きく変化する。したがって，高温空気流の解析ではエネルギー式の対流項の表現に厳密さが要求される。比熱が温度のみの関数となる広義の理想気体では，以下のように c_p を c_{pm} の一定値で与えることで，エネルギー式の取り扱いを近似ではあるが簡略にするアプローチがある。

$$c_{pm} = \frac{1}{T_1 - T_0} \int_{T_0}^{T_1} c_p(T) \mathrm{d}T \tag{29}$$

3·2　非圧縮性流体の場合　非圧縮性流体では密度 ρ (あるいは比体積 v) が一定とみなせるから†，式 (1) の左辺第 2 項は零になる。一方，式 (2) の第 2 項は残る。これは，$\mathrm{d}h = \mathrm{d}e + v\mathrm{d}p + p\mathrm{d}v = \mathrm{d}e + \mathrm{d}p/\rho$ となる [2] [9] ことから明らかである。圧力変化が無視できる場合や密度が大きい液体などでは $h \simeq e$ となる。たとえば，0.1 MPa の飽和水の場合 e =417.36 kJ/kg，h =417.46 kJ/kg とほぼ一致する。また，10 MPa という高圧の飽和水でも e =1393.0 kJ/kg，h =1407.6 kJ/kg と 1% 程度の差しかなく，$e \simeq h$ としてよいことがわかる。

非圧縮性流体では $\mathrm{d}v = 0$，$\partial u_k/\partial x_k = 0$ とおくから，温度表示されたエネルギー式 (19)，(23) の右辺第 2 項はともに零になる。つまり，$c_v = c_p = c$ である。一般に，液体や固体の比熱の測定では c_p が測定され，c_v は周知の次式から計算される。

$$c_p - c_v = \frac{vT\beta^2}{k_T} \tag{30}$$

ここで k_T は等温圧縮率 $k_T = -(\partial v/\partial p)_T/v$ を示す。現実の固体や液体では c_p と c_v の差は c_v の 3～10% (岩波 理化学辞典) になるが，この程度の差を無視して $c_p \simeq c_v$ とすれば，温度表示されたエネルギー式における比熱として c_p を採用できる。Eckert & Drake [4] では，物性値一定の流体に対する関係式は，式中の比熱が (c_v ではなく) c_p で表示されるとき，現実の流体の実際的な条件をいくらか良く表すと述べられている。

†完全な非圧縮性流体では，流体圧力は熱力学的な変数 (圧力) とはいえなくなる [7]。

3·3　理想気体の場合　理想気体の状態方程式は次式で与えられる。

$$pv = RT,\ \text{または}\ p = \rho RT. \tag{31}$$

ここで R は気体定数である。式 (31) により，式 (19) と式 (23) の右辺第 2 項の係数は次式のように簡単になる。

$$\left.\begin{aligned} T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v &= p, \\ \left(\frac{\partial \ln v}{\partial \ln T}\right)_p &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

この結果から理想気体のエネルギー式は次のようになる。

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_k}\right) - p\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \Phi \tag{33}$$

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_k}\right) + \frac{Dp}{Dt} + \Phi \tag{34}$$

熱伝導と流体摩擦が無視できる場合，つまり式 (33) の右辺第 1 項と第 3 項がない場合には，状態方程式 (31) 第 2 式の対数微分に式 (33) を代入し，マイヤーの関係 $c_p - c_v = R$ を用いれば，Dp/Dt と $p(\partial u_k/\partial x_k)$ に次の関係があることがわかる。

$$\begin{aligned} \frac{Dp}{Dt} &= p\left(\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + \frac{1}{T}\frac{DT}{Dt}\right) \\ &= -p\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{p}{T}\left(-\frac{p}{\rho c_v}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) \\ &= -\left(\frac{c_v + R}{c_v}\right) p \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \\ &= -\gamma p \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \end{aligned} \tag{35}$$

ここで，γ は比熱比 c_p/c_v を示す。このとき，式 (34) は $\rho c_p(DT/Dt) + \gamma p(\partial u_k/\partial x_k) = \gamma[\rho c_v(DT/Dt) + p(\partial u_k/\partial x_k)] = 0$ となって，当然のことながら式 (33) と式 (34) は整合する。理想気体では $\mathrm{d}e = c_v \mathrm{d}T$，$\mathrm{d}h = c_p \mathrm{d}T$ であり，式 (1), (2) の左辺第 2 項は式 (33),

(34) の右辺第 2 項にそれぞれ相当する。したがって，式 (35) の結果から，熱伝導と流体摩擦がない (等エントロピ変化の) 場合には，Dp/Dt と $(p/\rho)D\rho/Dt$ の比は比熱比 γ となって，これらはほぼ同じオーダの量であることがわかる。

現実の系では熱伝導や流体摩擦が存在するから，等エントロピ変化は実現しない。式 (1) の左辺第 2 項 [式 (33) の右辺第 2 項] は単位時間・単位体積あたりの体積変化仕事を表しており，流体の密度変化が大きければ無視できない。一方，そのような場合でも，流速が高くなければ，式 (2) の左辺第 2 項 [式 (34) の右辺第 2 項] の影響は小さいことが期待できる。よく使われるエネルギー式 (7) では，式 (34) において $\lambda = \text{const.}$ とし，また右辺の第 2 項と第 3 項が無視されていて，実際に扱いやすい形になっている。この形式の妥当性について以下で検討する。

流体の密度に変化があっても流れの速度が音速に比べて十分小さい場合には，低マッハ数近似 (low-Mach number approximation) が適用できる [10]。このとき，圧力 p は次のように分解される。

$$p = p_0(t) + p_1(t, x_1, x_2, x_3) \tag{36}$$

ここで，p_0 は熱力学的な圧力であり時間 t のみの関数である。 p_1 は流体の運動に誘起される動的な圧力であり時空間的に変動する。p_0 のオーダを $O(1)$ とするとき，p_1 のそれは $O(M^2)$ (M：マッハ数) であり，p_1 は運動方程式 (6) の圧力勾配項に反映される。

エンジン筒内の燃焼のように閉じた空間で大きな発熱があるような場合 [11] を除けば，p_0 は一定とされる [12]。また，空間スケールが 1 km のオーダをこえない規模の熱流体解析では，p は

$$p = p_0 - \rho_\infty g x_3 + p_1 \tag{37}$$

と分解される。ここで，ρ_∞ は基準の密度，g は重力加速度，x_3 は重力が作用する方向の空間座標である。式 (37) の右辺第 2 項は重力によるポテンシャルの影響を表す。

低マッハ数近似では，エネルギー式および理想気体の状態方程式に現れる圧力 p を熱力学的圧力 p_0 で置換して，密度 ρ と温度 T を

$$\rho T = \frac{p_0}{R} = \text{const.} \tag{38}$$

で関係づける。流速が音速より十分小さい場合 (通常，$M^2 < 0.1$) には，上記の低マッハ数近似を適用できて音波の影響は排除される。その結果，エネルギー式における動的な圧力 p_1 の寄与は無視されて，式 (34) の第 2 項 Dp/Dt は 0 とされる。

最後に，式 (33), (34) の右辺最終項 Φ の影響について検討する。この項は流体摩擦による発熱を表しているが，式 (7) では無視されている。この項が無視できるか否かは次の Eckert 数により判断される [4]。

$$\text{Ec} = \frac{U^2}{c_{p0}\Delta T} \tag{39}$$

ここで，$U, c_{p0}, \Delta T$ はそれぞれ代表とする速度，定圧比熱，温度差である。$\text{Ec} \sim 1$ の場合にはエネルギー式における Φ の影響は無視できなくなる [4]。たとえば，温度差 100 K の伝熱条件で空気 [$c_p \simeq 10^3$ J/(kg·K)] が流速 300 m/s で流れているとき $\text{Ec} = 0.9$ となる。同じ伝熱条件下でも流速 30 m/s では $\text{Ec} = 0.009$ となる。このように，流速が音速に近くなると流体摩擦による発熱の影響は無視できない。逆にいえば，低マッハ数近似が有効であるような流れにおいては，非常に小さな温度差の現象を取り扱うのでなければ Φ を無視してよいと考えられる。実験室レベルの通常の伝熱実験ではこれらの影響を考慮に入れる必要はなく，式 (7) を利用できる。

4. エネルギー式を巡って

強制対流では速度場が与えられれば温度場は受動的に決定される。一方，自然対流のように浮力で駆動される流れでは，速度場と温度場にそのような一方的な関係は成立しない。Tsuji, Nagano らは，垂直平板自然対流乱流境界層 (空気) の内層の乱流構造が強制対流のそれとは非常に異なることを追求する中で，式 (34) の Dp/Dt の項を通して熱エネルギーが乱流エネルギーに直接変換されるプロセスがあることを見い出した [13]。Dp/Dt が含まれない式 (7) ではこのようなエネルギー変換の過程を理解することはできない。流速 1 m/s の常温空気がもつ運動エネルギーは圧力換算でわずかに 0.6 Pa である。この大きさはエネルギー式の収支においては無視しうるものであるが，速度場には支配的な役割をもつ。このように，数値解析では無視できる項でも，現象を理解する過程では本質的な役割をすることがある。

これまで取り上げてきた純物質のエネルギー式と

は異なり，燃焼のような気相反応系で使われるエネルギー式は非常に複雑である [8] [10] [11]。燃焼場での熱流束は，1) 熱伝導，2) 化学種の分子拡散によるエンタルピ輸送，3) 濃度勾配により駆動される熱拡散 (Dufour 効果)，4) 放射熱流束からなるが，3) と 4) は通常は省略される。燃焼解析で使われるエネルギー式はエンタルピ h または温度 T で表示されることが多い。燃焼反応は温度の上昇にともなって指数関数的に反応が速く進行する強い非線形性をもつから，場の温度を高精度で求める必要がある。燃焼場は多くの化学種の輸送過程を伴うことから，エネルギー式をエンタルピで表すと，高い精度で温度を求めるには膨大な反復計算が必要である [11]。宮内・店橋は温度で陽に表示されたエネルギー式を導出することによりこの問題を解決し，乱流燃焼の DNS に成功している [11]。乱流のモデリングにおいては，モデル化の対象をエンタルピ表示されたエネルギー式とするのか，温度表示のエネルギー式とするかは現象論的モデリングの基礎にかかわる重要な問題でもある [14]。

5. おわりに

「エネルギー式を巡る」と題して話をまとめようと試みたが，彷徨うことになってしまったように思う。現実に生起する現象を完全に記述できる方程式はないから，支配方程式を構成する際には，現象を単純にし理想化する作業が導入される。また，解析段階では，重要性が低く取り扱い困難と見られる項は省略される。エネルギー式ではこれらのプロセスは大方においてうまく機能している。しかし，無視された項については常に意識していることは有益であると思う。

謝　辞

本稿の執筆にあたりご助言をいただいた名古屋工業大学教授 長野靖尚先生に深謝する。

文　献

[1] 西川兼康，伝熱研究，**22**-84 (1983), 17–19. (日本伝熱学会 40 周年記念 CD-ROM)

[2] 森康夫・土方邦夫,「流れと熱の工学 II」，共立出版 (1977).

[3] Bird, R. B., Stewart, W. E. and Lightfoot, E. N., *Transport Phenomena*, John Wiley & Sons (1960).

[4] Eckert, E. R. G. and Drake, R. M., *Analysis of Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill (1972).

[5] エリ・ランダウ，イェ・リフシッツ，(竹内均 訳),「流体力学 1」，東京図書 (1971).

[6] アー・エス・モーニン，アー・エム・ヤグロム，(山田豊一 訳),「統計流体力学 1」，総合図書 (1975).

[7] Warsi, Z. U. A., *Fluid Dynamics — Theoretical and Computational Approaches (2nd Ed.)*, CRC-Press (1999).

[8] Kuo, K. K., *Principles of Combustion*, John Wiley & Sons (1986).

[9] Kays, W. M., *Convective Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill (1966).

[10] Williams, F. A., *Combustion Theory*, The Benjamin/Cummings Publishing (1985).

[11] 日本機械学会,「燃焼の数値計算」，丸善 (2001).

[12] Libby, P. A. and Williams, F. A., *Topics in Applied Physics: Turbulent Reacting Flows*, Springer (1980).

[13] Tsuji, T., Nagano, Y. and Tagawa, M., *Proc. 8th Symp. on Turbulent Shear Flows* (1991), 24.3.1–24.3.6.

[14] Tagawa, M., Matsubara, F. and Ohta, Y., *Combustion and Flame*, **129** (2002), 151–163.