

アイススケートのブレードと氷の間の潤滑に関する研究： 熔融水膜におけるスクイーズ流れの基礎的特性

航空宇宙工学専攻 熱工学研究室 吉田英生
e-mail: sakura@hideoyoshida.com

1. はじめに

2020年4月、私にとっては京都大学で最後の学部4回生の二人が研究室に配属された。二人とも体育会で、一人は野球部のエースの大西泰誠君、もう一人はアイスホッケー部の主将の篠田大二郎君(図1)である。最終年度の卒業研究は何か楽しいことをやってみてみたいと考えていたので、野球と熱を結びつけるのは難しかったが、アイスホッケーの方は「スケートに関する研究をやってみようか」と篠田君に持ちかけた。スケートが滑るメカニズムについては、長い研究の歴史の中で諸説あることは、いくつかの記事や論文[1,2]で多少は理解していたので、素人が新たに着手して実質1年間もない卒業研究でできることはしているのは覚悟の上だったが、初歩的なことでもいいからチャレンジしてみたいと思った。



図1 篠田大二郎君

氷とスケートブレードの間のミクロな現象に関しては実験設備も全くないので断念し、熱流体力学の視点からアプローチできるテーマはないかとヒントになる情報を探したところ、カナダのLozowskiら[3]のグループによる熔融液膜の存在を前提とする潤滑の論文に出会った。そこで、この論文で扱われた現象のほんの一部に注目した単純な系ではあるが、基礎的かつ新たな知見が獲られそうな問題設定をして、解析的に検討した結果を報告する。

2. 本論に先立ち流体力学に関する恩師への感謝

本論に入る前に、今回の公開セミナーの冒頭に25分間の貴重な時間をいただいたことに加え、私にとっては京都大学で最後の講演の機会でもあるので、流体力学に関する恩師を振り返ってご紹介させていただき、感謝を捧げたいと思う。

故 森康夫先生(1923-2012)東工大名誉教授、米国工学アカデミー外国人会員
http://www.wattandedison.com/Mori_m.pdf
http://www.htsj.or.jp/wp/media/2012_07.pdf



東京帝国大学第二工学部航空機体学科卒業で、谷一郎先生の高弟。Theodore von Kármán (Caltech)の第一弟子のW.R. Sears教授(Cornell大学)の研究室にフルブライト基金で留学された。理研を経て東工大で、元船舶技研で沸騰伝熱が専門だった故一色尚次先生(東京帝国大学第二工学部航空原動機学科卒業で、森先生とは同年でライバルでもあった)らとともに東工大を熱工学研究拠点の一つに育て上げられた。伝熱の分野で故佐藤俊先生(京大名誉教授 <http://www.wattandedison.com/IJHMT.html>)に続いてInt. J. Heat & Mass Transferの第2代Editor, ASMEのJakob賞, Int. Centre for Heat and Mass Transfer (ICHMT)のLuikovメダルを受賞, 同センターのPresidentも歴任。私は、学部4年生から博士3年生まで6年間の極めて厳しく、同時に暖かいご指導を受けた。森先生が60歳で定年退官された1983年3月に工学博士の学位をいただいた私は、不肖ながら最後の弟子となった。

故 土方邦夫先生(1943-1997)東工大教授
<https://www.jsme.or.jp/tes/PDF/NL22.pdf>
http://www.wattandedison.com/Hijikata_m.pdf
伝熱研究, 36巻, 142号 (1997.7)



森先生の下で助手・助教授時代、6年間のご指導を受けた。豪快にして優しく、電気電子回路製作や各種ソフトウェア(Hi-Word, Hi-Graph)

開発などの特技に加え、数学力も抜群で、惜しくも早世されたものの、表現する言葉が見つからないくらい、すごい実力の先生だった。守備範囲(むしろ攻撃範囲の語が適当と思われる)が広く、伝熱の広い分野で一級の仕事をされたが、とりわけ二相流に重点を置かれるとともに、さらに故小竹進東大名誉教授とミクロ系の伝熱研究を先導された。30歳代前半の助手時代に森先生と共著で出版された「流れと熱の工学 I・II」(共立出版)は現在絶版となっているが、両先生の面目躍如たるものがある。

日野幹雄先生(1932-) 東工大名誉教授

<http://www.wattandedison.com/Hino.pdf>

<http://www.asahi-net.or.jp/~rk7j-kndu/kenkyu/ke214.html>



土木系は同じキャンパス内ながら緑が丘地区という大岡山地区から一駅分離れた地点にあったこともあり通常の講義は受けたことがないが、1993年3月の最終講義だけは感銘深く聴講した。日野先生からは、むしろ「流体力学」、「スペクトル解析」、「境界値問題の解法」(いずれも朝倉書店)の教科書を通じて、流体力学の基礎骨格を形成していただいたと思う。数ある流体力学の教科書の中でも、今井功先生の「流体力学(前編)」(裳華房)と日野先生の「流体力学」は、私にとって永遠のバイブルである。最終講義の内容とも深く関係して、定年退官時、東京工大クロニクル(265号, 1993年3月)に「感謝と反省」というタイトルで寄稿された記事の末尾にあった「多過ぎる研究会・シンポジウム(中略)ここ3, 4年は鎖国主義を採ることにした。お付き合いは最小限にする。」という言葉が、未だに重く響いている。

故 鈴木健二郎先生(1940-2007) 京大名誉教授

http://www.wattandedison.com/Suzuki_m.pdf

http://www.htsj.or.jp/wp/media/2007_07.pdf



前述の故佐藤俊先生の第一弟子で、Imperial Collegeの故Spalding教授をリーダーとする一派——Launder教授, Hanjalic教授らとも親交があり、乱流モデルをいち早く取り入れた巧妙な数値計算などで、学生時代から勉強をさせていただいた。ICHMTの理事会議長や Int. J. Heat & Mass TransferのEditorを務められ日本の伝熱の国際化にも大きく貢献され、私自身同じ京大で仕事をさせていただ

いたご縁で、それらの後を継がせていただいた。マイクロガスタービンと燃料電池に関するCRESTプロジェクトの名リーダーとして、後述の長野先生や笠木先生などとともに5年間ご尽力いただいた。

故 ^{やすたか} 長野靖尚先生(1943-2015) 名工大名誉教授

http://www.htsj.or.jp/wp/media/2015_10.pdf

<https://www.nagare.or.jp/download/noauth.html?d=34-6tuitou1.pdf&dir=121>

<https://heat.web.nitech.ac.jp/PDF/MemoryToProfNagano.pdf>



私は博士論文から助手時代は乱流の研究を中心にしていたので、この分野では笠木先生とともに最もご指導いただいた。長野先生の仕事でとりわけ素晴らしいのは、精巧な熱線流速計による乱流伝熱(乱流熱流束)の信頼性の高い測定であり、その厳密なアプローチは乱流モデルに関する精緻な理論研究にも存分に生かされた。完全主義の一端を実感した一つの例として、ある国際会議でのご発表をProceedingsを参照しながら聴いていたとき、論文と一字一句変わらない長文の一節を暗記して話しておられるのに気付いた時の驚きが挙げられる。名工大の長野研究室は東大の笠木研究室とともに、機械系の乱流研究の拠点として、世界を先導された。

故 笠木伸英先生(1947-2015) 東大名誉教授

http://www.wattandedison.com/Kasagi_m.pdf

http://www.htsj.or.jp/wp/media/2016_1.pdf



前述のように、長野先生とともに乱流分野では最もご指導いただいた。PTVで壁乱流の諸量を壁極近傍まで精密に計測された研究にはとりわけインパクトを受けた。また第15回国際伝熱会議(IHTC-15京都, 2014 <http://www.ihtc-15.org>)を2006年に招致してから、8年あまり国際機関で一緒させていただき、先生はIHTC-15の組織委員長、私は実行委員長を務めた。前述のLaunder教授らと長年Int. J. Journal of Heat and Fluid FlowのEditorを務められ(私も2年間だけAssociate Editorとして貴重な勉強をさせていただいた)、Luikovメダルや Aurel Stodola Medalも受賞され、ICHMTのVice Presidentも歴任。あるとき「委員というのは委ねられた人ってことなんだよ」とおっしゃったことがあり、先生はその言葉通り、どんなに多忙で難局にあっても即座に責任を持って巧みに仕事をされたことが何よりも印象深く思い出される。

3. ブレードの形状と検討課題の設定

本論に戻ってまず図1は、アイスホッケーで使用するスケートシューズのブレード部である(側面図では右側が前方)。ブレードの幅は約2.8 mm, ブレードの前後は面取りがしてあるが、曲率が一定の部分は約200 mmで、その曲率半径は約2500 mmである。



図1 スケートブレード

篠田君によると、ブレード面の研磨は専門業者にしかできない精密作業であって、研磨された断面は必ず僅かではあるが中央部に向けて窪んでいることのであった。そこでワンショット3D形状測定機を用いて、断面形状を計測した一例を図2に示す(どの断面でも概ね同様な形状)。中央部分において約50 μm 窪んでいることが分かる。そこで、このようなブレード面の傾斜がもたらす効果も、本研究での検討課題の一つとすることにした。

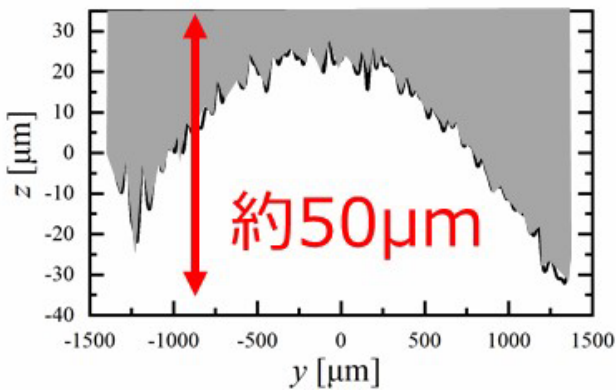


図2 ブレードの断面形状

(上下に小刻みに変動しているのは計測ノイズ)

4. ブレードと氷の間の液膜のモデル化

定常走行するアイススケートの簡単なモデルの一つとして、摩擦の作用によって発生する熱量に見合った量の氷が融解して水となり、この水が進行方向に垂直方向の流れとなって左右に排出される系を考える。(ただし、液膜内の熱発生と、その熱で氷を融解する時間的前後関係や空間的なズレはここでは無視する。) すなわち、液膜内の流れとして、進

行方向(x方向)には図3のようにブレードが速度 V_s で移動する発達したクエット流れ, 横方向(y方向)には図4のように比較的低速で水を吐き出すスクイーズ(squeeze=搾る:本問題の場合は、液膜厚さは不変であるが、発生する水を定期的押し出す擬似的スクイーズ)流れを考え、基本的には両者を独立に扱うこととする。すなわち、前者はスケーターの質量とスピードに見合う摩擦仕事により氷の融解量を与える主流であり、後者はその水を左右に排出して定常状態を保つ二次流れと考える。さらに、後者はブレード端部から中央に向けて圧力勾配を発生することにより、スケーターの質量と釣り合う作用を及ぼすと考える。なお、このときスクイーズ流れで発生する速度成分により発生する熱量はクエット流れで発生する熱量に比べて無視できるものとする。

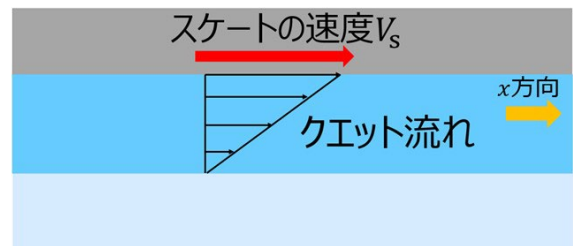


図3 進行方向のクエット流れ

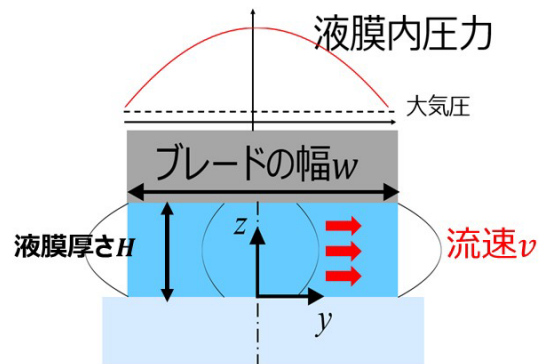


図4 横方向へのスクイーズ流れ

5. ブレードに傾斜がない場合の近似解析

まず初めに、ブレードに傾斜がない場合の釣り合いを考える。スケーターの質量(体重)を m , 氷と接触するブレードの長さを l , 幅を w とし、液膜厚さは進行方向に一定で H とする。また、図3と図4に示したように、座標系としては、進行、横、鉛直各方向

に (x,y,z) をとり, (x,y) 方向の速度成分を (u,v) とし, 液膜内のゲージ圧力を $p(y)$ とする.

水の粘性係数を μ とすると, クエット流れにおける粘性散逸(発熱)項は

$$\Phi = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 = \mu \left(\frac{V_s}{H} \right)^2 \quad (1)$$

となる. この熱によって氷が融解して水を発生する体積 S_0 は, 水の密度を ρ , 融解潜熱を l_f とすると,

$$S_0 = \frac{\mu}{\rho l_f} \left(\frac{V_s}{H} \right)^2 \quad (2)$$

となる. ここで視点を y 方向のスクイズ流れに移し, 断面平均速度を $V_0(y)$ とすると, 連続の式

$$\frac{dV_0(y)}{dy} = S_0 \quad (3)$$

が成り立ち, したがって

$$V_0(y) = \int_0^y dV_0 = \int_0^y S_0 dy = S_0 y \quad (4)$$

端部における流速は

$$V_0 \left(\frac{w}{2} \right) = \frac{w}{2} S_0 \quad (5)$$

と表される.

次に, このスクイズ流れにおいて断面平均速度でなく高さ方向に変化する $v(y,z)$ を考える. 薄い液膜内では粘性が支配的と考えて運動方程式で対流項を無視すると

$$\frac{dp(y)}{dy} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (6)$$

となり, 氷表面とブレード面での境界条件から

$$v(y,z) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp(y)}{dy} (z^2 - zH) \quad (7)$$

となる. このとき断面平均速度は

$$V_0(y) = \frac{1}{H} \int_0^H v dz = -\frac{H^2}{12\mu} \frac{dp(y)}{dy} \quad (8)$$

になるので, 式(2), 式(4), 式(8)より

$$\frac{dp(y)}{dy} = -\frac{12\mu V_0(y)}{H^2} = -\frac{12\mu V_s^2}{\rho l_f H^4} y \quad (9)$$

が得られる. そこで, ゲージ圧力 $p(y)$ について積分し, ブレード端部で $p(w/2) = 0$ の境界条件を適用すると

$$p(y) = \frac{6\mu V_s^2}{\rho l_f H^4} \left(\frac{w^2}{4} - y^2 \right) \quad (10)$$

となる. さらに, スケートの質量 m とのつりあいを考えると

$$mg = 2l \int_0^{w/2} p(y) dy \quad (11)$$

となり, 以下の液膜厚さ H とゲージ圧力 $p(y)$ に関する式が得られる.

$$H = \left(\frac{\mu^2 V_s^2 l w^3}{mg \rho l_f} \right)^{1/4} \quad (12)$$

$$p(y) = \frac{6mg}{w^3 l} \left(\frac{w^2}{4} - y^2 \right) \quad (13)$$

このとき, 摩擦力は

$$F_0 = wl \cdot \mu \frac{V_s}{H} = (mgwl^3 \mu^2 \rho l_f V_s^2)^{1/4} \quad (14)$$

であるので, 摩擦係数は

$$\frac{F_0}{mg} = \frac{(mgwl^3 \mu^2 \rho l_f V_s^2)^{1/4}}{mg} \quad (15)$$

と表される.

図5にスケートの速度と液膜厚さの関係を示す. 液膜厚さ H はスケートの速度 V_s の1/2乗で変化すること, また通常は $1\mu\text{m}$ もなく極めて薄いことが分かる.

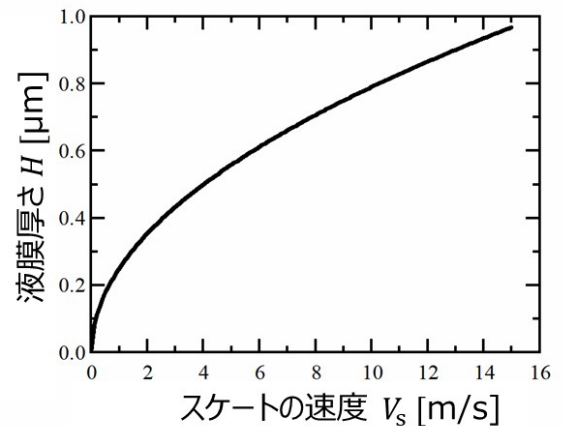


図5 スケートの速度と液膜厚さ

6. ブレードに傾斜がある場合の近似解析

次に、ブレードにわずかな傾斜がある場合について近似解析を試みる。図2の形状は円弧状であったが、本解析では図6に示すように中心線に対して対称な直線傾斜形状とする。傾斜の深さを Δh とし、 $y = w/4$ での平均液膜厚さを H_{inc} とすると、局所的な流路高さ $h(y)$ は

$$h(y) = H_{inc} - \frac{1}{2} \frac{y - w/4}{w/4} \Delta h = H_{inc} - \left(\frac{2}{w} y - \frac{1}{2} \right) \Delta h \quad (16)$$

と表される。

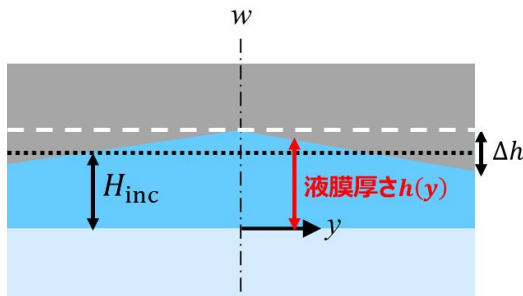


図6 ブレードの傾斜

傾斜がない場合と同様に、まず熱発生元になる進行方向のジェット流れについて考えると、スケートの速度 V_s は y 方向に一定であるが、流路高さに反比例して速度勾配が変化し、さらにその2乗で熱発生も変化する効果が加わる。したがって、

$$S(y) = \frac{\mu}{\rho l_f} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 = \frac{\mu}{\rho l_f} \left(\frac{V_s}{h(y)} \right)^2 \quad (17)$$

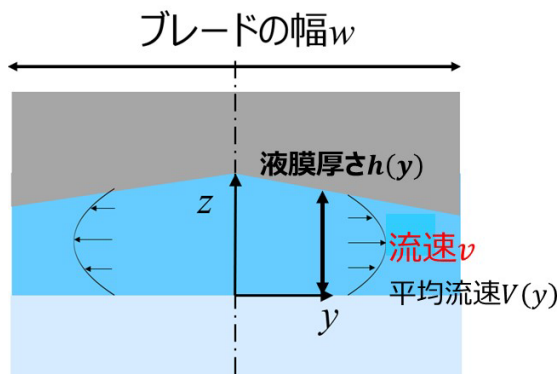


図7 傾斜した流路内でのスクイーズ流れ

一方、図7のような高さの変化するスクイーズ流れでは、断面 y での連続の式を考えると

$$\begin{aligned} \frac{d[V(y) \cdot h(y)]}{dy} &= S(y) \cdot h(y) \\ &= \frac{\mu}{\rho l_f} \left(\frac{V_s}{h(y)} \right)^2 \cdot h(y) \\ &= \frac{\mu V_s^2}{\rho l_f} \cdot \frac{1}{h(y)} = \frac{\mu V_s^2}{\rho l_f} \cdot \frac{1}{H_{inc} - \left(\frac{2}{w} y - \frac{1}{2} \right) \Delta h} \end{aligned} \quad (18)$$

であるので、 y 方向に積分すると

$$V(y) \cdot h(y) = - \frac{\mu w V_s^2}{2 \rho l_f \Delta h} \left(\log \left| y - \frac{w H_{inc}}{2 \Delta h} - \frac{w}{4} \right| - \log \left| \frac{w H_{inc}}{2 \Delta h} - \frac{w}{4} \right| \right) \quad (19)$$

となる。

ここで、傾斜がない場合と同様に局所流路高さ $h(y)$ に対するチャンネル流れの圧力損失の関係式が成り立つと仮定する（この問題のように対流項が無視できるならば、方程式的に圧力勾配は十分に発達したチャンネル流れの場合と全く同じ形になる）と

$$\frac{dp(y)}{dy} = - \frac{12 \mu V(y)}{h(y)^2} \quad (20)$$

となるので

$$\begin{aligned} \frac{dp(y)}{dy} &= \frac{6 \mu^2 w V_s^2}{\rho l_f \Delta h \left[H_{inc} - \left(\frac{2}{w} y - \frac{1}{2} \right) \Delta h \right]^3} \\ &\times \left(\log \left| y - \frac{w H_{inc}}{2 \Delta h} - \frac{w}{4} \right| - \log \left| \frac{w H_{inc}}{2 \Delta h} - \frac{w}{4} \right| \right) \end{aligned} \quad (21)$$

となる。

この式を y 方向に積分する（この段階では数値積分した）と、この条件で支えることのできる質量が求まるが、傾斜がない場合の式(12)のように最初に質量 m をして H_{inc} を一気に求めることはできない。そこで種々の H_{inc} の計算結果から、所望の m の値になる値を内挿することによって求めた。

このとき、摩擦力は

$$\begin{aligned} F_{inc} &= 2l \int_0^{w/2} \mu \frac{V_s}{h(y)} dy \\ &= \frac{-\mu l w V_s}{\Delta h} \left(\log \left| \frac{w H_{inc}}{2 \Delta h} + \frac{w}{4} \right| - \log \left| \frac{w H_{inc}}{2 \Delta h} - \frac{w}{4} \right| \right) \end{aligned} \quad (22)$$

となり、摩擦係数は

$$\frac{F_{inc}}{mg} = \frac{-\mu l w V_s}{mg \Delta h} \left(\log \left| -\frac{w H_{inc}}{2 \Delta h} + \frac{w}{4} \right| - \log \left| -\frac{w H_{inc}}{2 \Delta h} - \frac{w}{4} \right| \right) \quad (23)$$

と表される。

図8に傾斜の深さと平均液膜厚さの関係を示す。平均液膜厚さは傾斜深さの半分よりも必ず大きいという幾何学限界があり、これを赤線で示す。平均液膜厚さは赤線より僅かに大きいだけであり、ブレード端部での液膜厚さは極めて薄い。

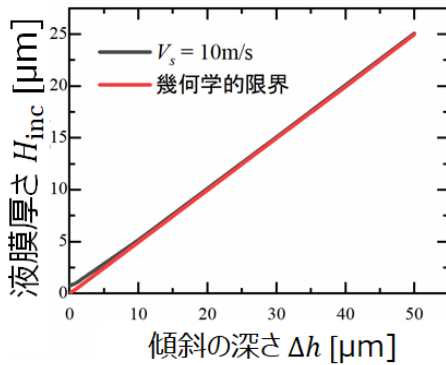


図8 傾斜の深さと液膜厚さ

図9に $V_s = 10 \text{ m/s}$ におけるスクイーズ流れの断面平均速度の変化を示す。傾斜がない場合は中心線から直線的に加速し、ブレード端部で 1.2 m/s となる。傾斜深さが増すほど端部での加速が急になり、端部での速度も増加することが分かる。

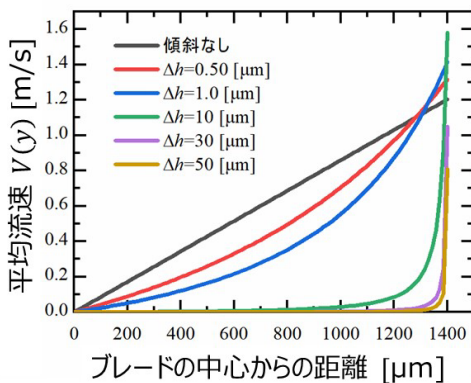


図9 スクイーズ流れの断面平均速度

図10に $V_s = 10 \text{ m/s}$ におけるゲージ圧力分布を示す。これらの積分値(面積)はスケーターの質量とつりあうのでどれも等しい。傾斜がない場合は中央で 30 MPa 近くに達している。傾斜深さが増すほどブレード

端部での圧力上昇が急になるが、中央部では平坦になることが分かる。

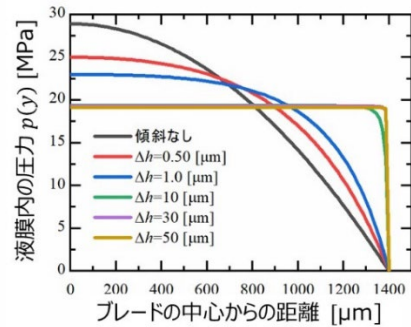


図10 傾斜の深さと圧力分布

図11に摩擦係数の変化を示す。僅かな傾斜が、図8で示したように平均的な液膜厚さを大きくし、その結果として摩擦係数も大きく減少させることが分かる。

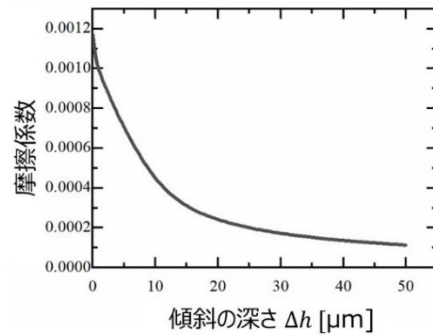


図11 傾斜の深さと摩擦係数

7. おわりに

本研究でのモデル化は極めて簡単なものではあったが、アイススケートの基礎的特性を理解する第一歩となったのではないかと考える。

参考文献

- [1] Rosenberg, R., Why is ice slippery, *Physics Today* (2005), **58** (12).
<https://physicstoday.scitation.org/doi/10.1063/1.2169444>
- [2] Oosterkamp, T.H., Boudewijn, T. and van Leeuwen, J.M.J., Skating on slippery ice, *Europhysics News* (2019), **50** (1), pp. 28-32.
<https://doi.org/10.1051/epn/2019104>
- [3] Lozowski E, Szilder K, Derivation and new analysis of a hydrodynamic model of speed skate ice friction. *International Journal of Offshore and Polar Engineering* (2013), **23** (2), pp. 104-111.