

# 土木工学者としてのミランコビッチの業績 に関する調査研究

細田 尚<sup>1</sup>・岸田 潔<sup>2</sup>・西藤 潤<sup>3</sup>・白井 秀和<sup>4</sup>

<sup>1</sup>フェロー会員 工博 京都大学大学院教授 工学研究科都市社会工学専攻  
(〒615-8540 京都市西京区京都大学桂C1-3-265) E-mail: hosoda.takashi.4w@kyoto-u.ac.jp

<sup>2</sup>正会員 博士(工学) 京都大学大学院准教授 工学研究科都市社会工学専攻  
(〒615-8540 京都市西京区京都大学桂C1-3-266) E-mail: kishida.kiyoshi.3r@kyoto-u.ac.jp

<sup>3</sup>正会員 博士(工学) 京都大学大学院准教授 工学研究科社会基盤工学専攻  
(〒615-8540 京都市西京区京都大学桂C1-4-586) E-mail: saito.jun.3n@kyoto-u.ac.jp

<sup>4</sup>正会員 博士(工学) 日本学術振興会特別研究員(河川流域マネジメント工学講座内)  
(〒615-8540 京都市西京区京都大学桂C1-3-268) E-mail: shirai.hidekazu.28w@st.kyoto-u.ac.jp

ミルティン・ミランコビッチ(Milutin Milankovitch (1879-1958), セルビア人)は、ベオグラード大学応用数学科の教授時代に天体力学の研究を行った研究者としてよく知られている。氷河期の氷期と間氷期の交代が地球の公転・自転運動の周期的変動により生じることを理論的に解明した業績が特に有名であり、彼が理論計算により導いた気候変動周期は”ミランコビッチ・サイクル”と呼ばれている。一方、ウィーン工科大学在学時には土木工学を専攻していて、石積みアーチ構造物の安定性に関する理論的研究により博士の学位を取得している。その後、ウィーンのコンクリート構造設計会社に就職し、土木技術者として水路橋、アーチ橋、下水道システム等多数の構造物の設計・施工業務に従事するとともにコンクリート構造物設計に関する多数の特許も取得している。

本稿は、セルビア国ベオグラードにあるミランコビッチ協会で購入した資料、ミランコビッチの博士論文(ドイツ語)を英語で解説したFoceの論文、その他の石積みアーチに関する最近の論文を下にして、土木工学者・技術者時代のミランコビッチの業績について調査した結果をとりまとめたものである。

**Key Words :** *Milutin Milankovitch, Belgrade University, masonry arch, stone skelton, limit analysis*

## 1. はじめに

ミルティン・ミランコビッチ(Milutin Milankovitch, 1879-1958, セルビア人)は、ベオグラード大学応用数学科の教授時代に天体力学の研究を行った研究者としてよく知られている。氷河期の氷期と間氷期の交代が地球の公転・自転運動の周期的変動により生じることを理論的に解明した業績が特に有名であり、彼が理論計算により導いた気候変動周期は”ミランコビッチ・サイクル”と呼ばれている<sup>1)</sup>。彼の天体力学に関する膨大な研究成果は”Kanon der Erdbestrahlung und seine Anwendung auf das Eiszeitenproblem”と題する著作にまとめられ、その和訳も出版されている<sup>2,3)</sup>。

一方、ミランコビッチはウィーン工科大学の学生時代には土木工学を専攻し、力の作用線理論に基づいた石積み構造物の安定性解析に関する研究を行い、1904年博士の学位を取得している<sup>4)</sup>。その後、ウィーンにある土

木・建築構造物の設計施工会社であるAdolf Baron Pittel Betonbau-Unternehmungに就職し、ダム、橋梁、石積みアーチ橋、水路橋、鉄筋コンクリート構造物等の設計・施工業務に携わるとともに、数多くの特許も取得している。

著者の一人である細田が2010年6月にベオグラード大学を訪問した時、ミランコビッチの土木工学者・技術者時代の業績に関する展示会が偶然開催されており、見学する機会があった。ミランコビッチ・サイクルについて知識を持っていたものの、ミランコビッチと土木工学の関連については全く認識しておらず、展示されていたパネルはいずれも興味深い内容であった。2012年9月にベオグラードを再訪した際、ミランコビッチ協会ベオグラード(Association “Milutin Milankovitch”, Belgrade)を訪問し会長のSlavko Maksimovic氏に面会した。(Slavko Maksimovic氏は都市雨水マネジメント研究で著名なCedo Maksimovic教授(Imperial College of Science, Technology and Medicine)の実弟)面会時にMaksimovic氏から協会がミラン

コビッチの経歴と業績をまとめた冊子”Milutin Milankovitch, A Traveler through Distant Worlds and Times”<sup>9)</sup>および展示パネルを含む多数の資料提供を受けることができた。

帰国後、展示パネルの内容を検討したところ、土木工学者・技術者時代のミランコビッチの主要な業績として石積み構造物の理論解析があることが分かった。石積みアーチ構造物を中心に文献調査を開始したところ、建築構造の歴史研究家のFoceによるミランコビッチの博士学位論文”*Beitrag zur Theorie der Druck-kurven*”を解説し評価した論文<sup>9)</sup>を発見し、土木工学者としてもミランコビッチが優れた業績を残していることを知った。

土木工学者・技術者時代のミランコビッチの業績について、残念ながら我が国ではほとんど知られていない。そこで、Foceの論文を発見した後、京都大学工学研究科に所属する土木工学関連の研究者数名が協力して、入手した資料や関連論文をもとにミランコビッチの経歴と学問業績について取りまとめ、我が国の土木工学の研究者・技術者に広く紹介するための活動を開始した。

## 2. ミランコビッチの経歴の概要

ここでは、まずミランコビッチの生誕からベオグラード大学応用数学科教授に就任するまでの経歴について簡単に記述する。ミランコビッチの祖先はコソボ地区出身と言われているが、自身は1879年にDaljという当時オーストリアーハンガリー帝国領内にあったスラボニア地区の中心Osijek近くのドナウ川河畔の小さな村で生まれた。稀有な数学的才能を持っていたこともあって、彼は17歳で初等教育を終えた後、オーストリアの首都ウィーンにあるウィーン工科大学に入学し土木工学を専攻した。1902年に最優秀の成績で卒業し、1904年に”*Beitrag zur Theorie der Druck-kurven*”と題する石積みアーチ構造物の理論解析に関する博士論文を完成させ、若干25歳で博士の学位を取得した。図-2に肖像写真と博士論文学位記を示す。

その後、彼は土木工学分野の大きな会社で働くことを決意し、1905年にウィーンにあるBaron Pittelというコンクリート構造設計施工会社に就職した。Baron Pittelでの5年の間に、水路橋、アーチ橋、ベオグラードの下水道システム等の建設事業に携わり顕著な業績を残すとともに、鉄筋コンクリート構造設計に関する5つの特許を取得した。図-3はミランコビッチが関わったバルカン横断鉄道の鉄筋コンクリートアーチ橋の建設当時の写真である。また、図-4は1910年に取得した鉄筋コンクリート構造に関する特許の証明書である。

ミランコビッチは1909年に祖国のベオグラード大学から応用数学科の教授に就任するようにとの要請を受けた。その時の心の内を彼は後年次のように述べている<sup>9)</sup>。



図-1 ミランコビッチ協会ベオグラード会長 Slavko Maksimovic 氏 (右) とともに (2012年9月協会内で撮影)

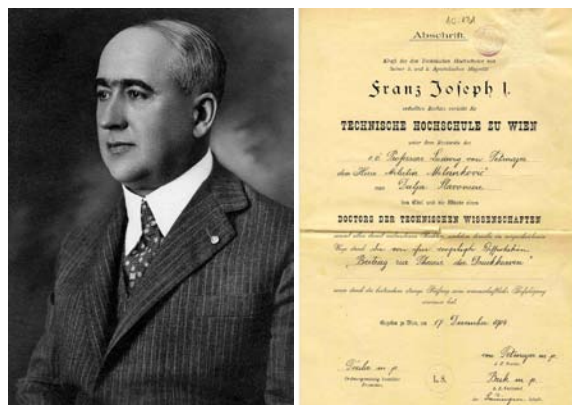


図-2 肖像写真と博士論文学位記 (ミランコビッチ協会提供)

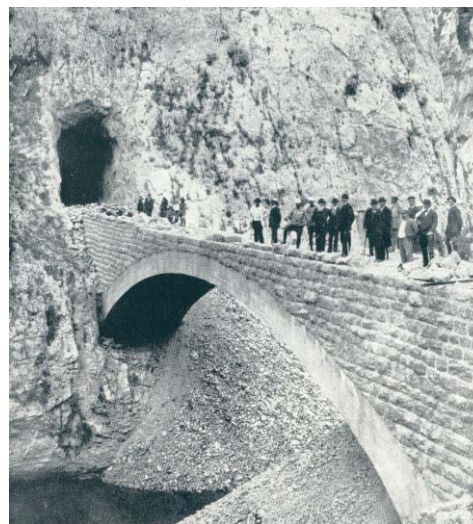


図-3 バルカン横断鉄道の鉄筋コンクリートアーチ橋 (ミランコビッチ協会提供)

“I was thinking what to do without consulting anyone else. Maybe I would painfully feel the immense difference between great Vienna and small Belgrade. Is my duty to live, work and die among my native people who offer me what they can? The Applied Mathematics Chair is my great desire. There I could find all the conditions to develop my abilities and repay my people. That would combine those three branches of exact science which I had studied the most and,

taken together, they would offer me wide possibilities for such scientific work that I wanted and there I thought I could create great works. I was enchanted with the very title of the Chair for Applied Mathematics. I always appreciated mathematics as a wonderful tool for solving the problems we face when studying nature and space, the extraordinary nature of which is best reflected in Celestial Mechanics and Theoretical Physics. And these two sciences were integral parts of my Chair.”

ベオグラード大学に移ってからのミランコビッチの業績については多くの文献があるが、本稿の目的と直接関連しないので省略する。

### 3. 博士論文の概要

石積み構造物の安定性に関するミランコビッチの博士論文はドイツ語で記述されていることや後年の天体力学分野とは内容が大きく異なるため長らく知られていなかったようである。そのため、この分野で先駆的な役割を果たしてきたCambridge大学のHeymanの多くの著作<sup>7)</sup>中にも引用されていない。前述したように、イタリアの建築構造史家であるFoceによる博士論文の解説と評価が2007年にNexus Network Journalに掲載されたため<sup>8)</sup>、関連分野の研究者は博士論文の詳細な内容を知ることができるようになった。これにより、最近になって円形アーチの安定性に関してHeyman<sup>7)</sup>やCocchetti, Colasante & Rizzi<sup>8)</sup>(以後、著者らが用いている略称CCRとして記述する。)の研究とミランコビッチの理論を比較した論文が出てくるようになってきたと考えられる。

ここでは、まず任意の外力条件下にある一般形状の石積み構造物を対象にミランコビッチが導いた力の作用線方程式について概説し、その適用例として数多くの研究者が取り扱ってきた円形アーチの力の作用線について記述する。ミランコビッチの力の作用線理論は、本質的に重要な数学的厳密性を重視する彼の特質をよく表していると考えられ、後年の天体力学分野での偉大な業績を予感させる内容を包含している。

まず、ミランコビッチが導出した石積みアーチ構造物の作用線に関する一般方程式について概説する。図-5を参照して、アーチの微小要素NN'N<sub>1</sub>N<sub>1</sub>'のN<sub>1</sub>N<sub>1</sub>'をNN'に近づけたときの重心位置Gと中点Mの距離を表す式(1)を導いた。

$$\overline{OG} = \rho + \frac{\delta^2}{12\rho} \quad (1)$$

ここに、 $\rho$  は $\Omega$ とMの距離、 $\delta$ はNN'の距離を表す。

つぎに、作用線の方程式を導くために図-6を参照して、微小要素NN'N<sub>1</sub>N<sub>1</sub>'のE<sub>1</sub>回りのモーメントの釣合式(2)を導いた。

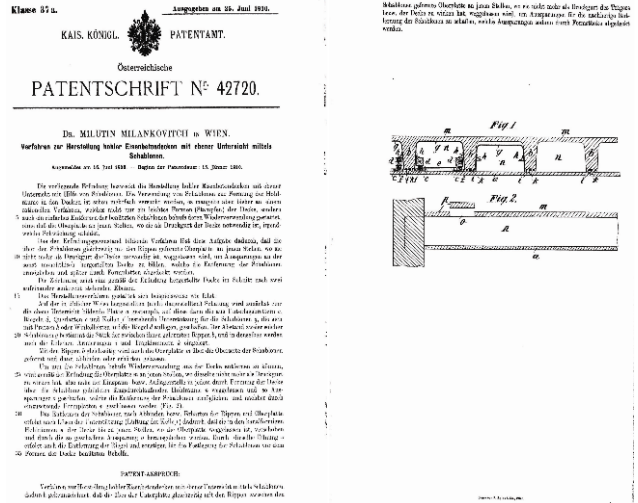


図-4 1910年に取得した鉄筋コンクリート構造に関する特許証明書 (ミランコビッチ協会提供)

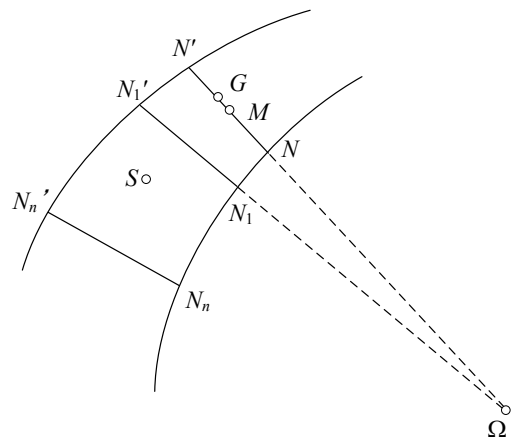


図-5 アーチ断面の midpoint と微小要素の重心位置の関係

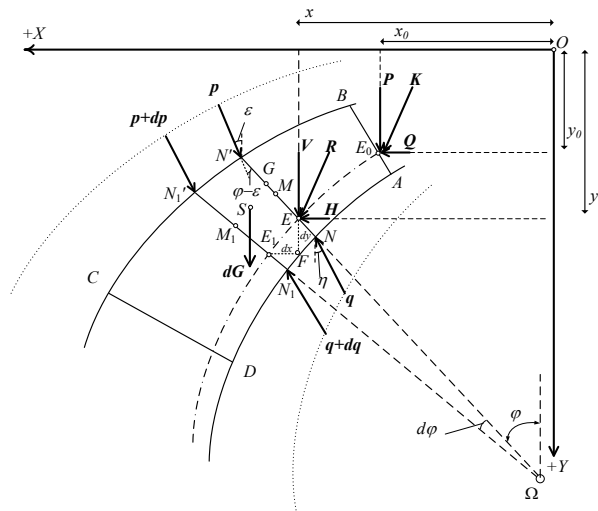


図-6 ミランコビッチが作用線理論の導出に用いた概念図

$$Vdx - Hdy - g\beta\delta \left( \frac{\delta^2}{12\rho} + \xi \right) \sin\phi\rho d\phi - p \left( \frac{\delta}{2} + \xi \right) \sin(\phi - \epsilon) de - q \left( \frac{\delta}{2} - \xi \right) \sin(\phi - \eta) di = 0 \quad (2)$$

ここに、 $\xi$ は合力  $R$  の作用位置  $E$ と  $M$ の距離を表す。その他の記号は図-6を参照されたい。

鉛直、水平方向の力の釣り合い式(3)、(4)と式(2)の極限をとった式(5)を連立して任意の外力が作用しているアーチ内の力の作用線を計算することができる。

$$V = P + g\beta \int_{x_0}^x \delta \rho d\varphi \quad (3)$$

$$+ \int_{x_0}^x p \cos \varepsilon de - \int_{x_0}^x q \cos \eta di$$

$$H = Q - \int_{x_0}^x p \sin \varepsilon de + \int_{x_0}^x q \sin \eta di \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{V}{H} - \frac{dy}{dx} = \frac{1}{H} \left[ g\beta \delta \rho \left( \frac{\delta^2}{12\rho} + \xi \right) \sin \varphi \frac{d\varphi}{dx} \right. \\ \left. + p \left( \frac{\delta}{2} + \xi \right) \sin(\varphi - \varepsilon) \frac{de}{dx} \right. \\ \left. + q \left( \frac{\delta}{2} - \xi \right) \sin(\varphi - \eta) \frac{di}{dx} \right] \quad (5) \end{aligned}$$

図-7に示した厚さが一定の円形アーチに対してミランコビッチは作用線の式(6)を導いている。

$$\rho = \frac{\rho_0 Q + \frac{1}{6} a(a^2 + 12r^2) \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{ar\varphi \sin \varphi + Q \cos \varphi} \quad (6)$$

石積みアーチが安定であるためには、力の作用線がアーチ内に存在していることが必要であり、安定なアーチの最小厚さは作用線が図-8の状態になっている場合である。ミランコビッチは式(6)を用いてこの状態の崩壊角と最小厚さを  $\angle A\Omega K = 54^\circ 29'$ 、 $a = 0.1075r$ と計算している。

#### 4. 円形石積みアーチの安定性に関する従来の研究との関連

CCRは、石積み構造物の研究をリードしてきたCambridge大学のHeymanが提案したモデル、それを改良したCCRのモデルとミランコビッチ理論を比較検討している<sup>9)</sup>。Heymanは図-9に対応した破壊モードとして図-9のような極限状態を考え、力の釣合式、A点とB点回りのモーメントの釣合式、図-10に示すB点での力が内側境界線に接するという条件式(Heyman's tangency condition)を連立してB点の位置と最小厚さを計算する理論式を導いた。

一方、CCRは図-11上に示した状態を考えて力とモーメントの釣合を連立し、作用線位置を決める関係式を導いた。作用線が図-11下の状態になる場合が最小厚さを有する円形アーチとなる。ただし、円形アーチの微小要素の重心位置はHeymanと同様にアーチの中心線上にあると仮定しており、ミランコビッチ理論の式(1)に対応する効果は考慮していない。

CCRは図-12に示したように、三者の理論を用いた計

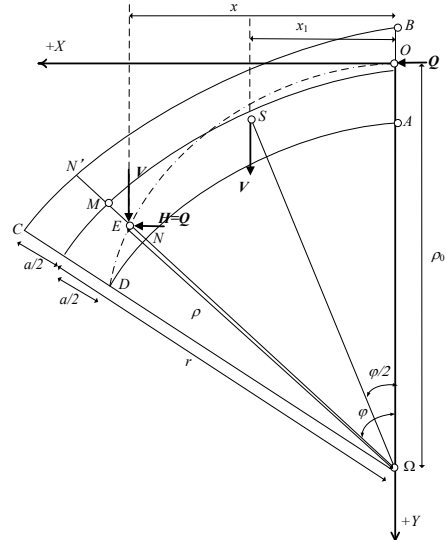


図-7 厚さが一定の円形アーチ内の力の作用線

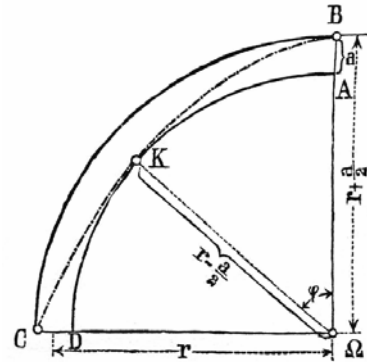


図-8 安定な最小厚さを有する円形アーチとその中の力の作用線の関係(Foceの論文のFig7)

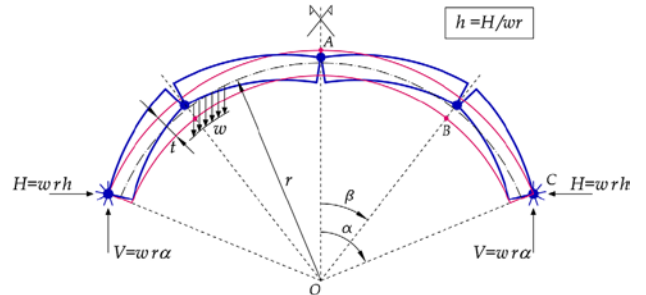


図-9 石積み円形アーチの破壊モード (CCRの論文のFig2)

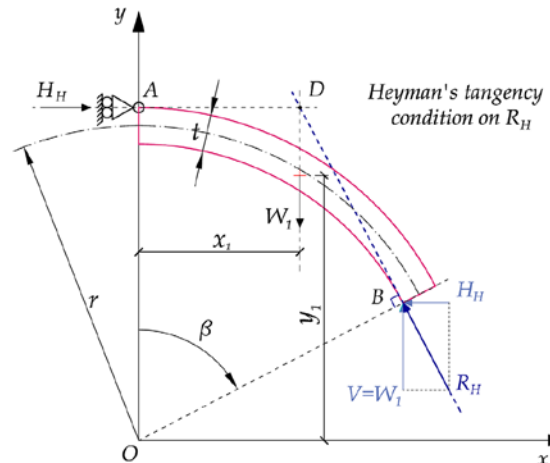


図-10 B点における力の接線条件 (CCRの論文のFig4)

算結果を比較するとともに、別途行ったDDA解析結果と理論解析結果も比較している<sup>9)</sup>。図-12をみると、CCRとミランコビッチ理論は互いによく一致し、DDA解析結果とも適合している。Heymanの理論はアーチの角度が大きくなるとともに他の結果との差が大きくなる。円形アーチに限れば、CCRの理論は微小要素の重心位置の仮定以外はミランコビッチの理論と同等であるため、両者の結果が一致するのは当然と考えられる。CCRが指摘しているように、Heymanの理論の場合、B点での接線条件のみを考慮しているが、その他の理論では接線条件以外にアーチの内側境界と接する作用線の曲率も考慮しており、このことが接点での曲率が大きくなるとHeymanの理論の適合性が悪くなる理由と考えられる。

ミランコビッチの研究はHeymanやCCRより50年~100年以上前に行われただけでなく、任意の外力作用の下での一般形状を有するアーチの作用線方程式を導いていることに留意する必要がある。

CCRの論文の参考文献には多次元弾塑性解析やDEM・DDA等の離散要素解析等の文献も含まれており、現在の石積みアーチ構造研究の状況を知ることができる。ミランコビッチ等の力の作用線を用いた解析法は極限解析に分類されるが、その延長線上にあるのが、石積みアーチを引っ張りに対してほとんど抵抗しない物質から成る弾塑性曲り梁としての取り扱いと考えられる。今後、ミランコビッチ等の作用線理論と弾塑性曲り梁理論<sup>10,11)</sup>との関連についてさらに調査を行いたい。

## 5. おわりに

本稿はミランコビッチが土木工学者・技術者時代に行った石積み構造物に関する研究業績について、最近の論文や資料をもとに調査・検討した結果を要約したものである。本質的に重要な効果は複雑であっても厳密に取り扱おうとするミランコビッチの研究姿勢はすばらしく、後年の天体力学と気候変動研究分野での偉大な研究成果は、ミランコビッチの研究に対する真摯で厳正な態度があつてこそ成し遂げることができたと考えられる。

今後、本研究で取り扱った円形アーチ以外、例えば尖塔アーチ形状におけるミランコビッチ理論の優越性や弾塑性曲り梁理論との比較検討等を継続して行いたい。

**謝辞：**本研究を行うにあたり、ミランコビッチに関する資料の提供やセルビア語の翻訳等で多大な協力をいただいたミランコビッチ協会ベオグラード会長 Slavko Maksimovic氏、ベオグラード大学 Marko Ivetic氏、Nenad Jacimovic氏に深く感謝する。

## 参考文献

1) 竹内 均：知と感銘の世界、ひらめきと執念で拓い

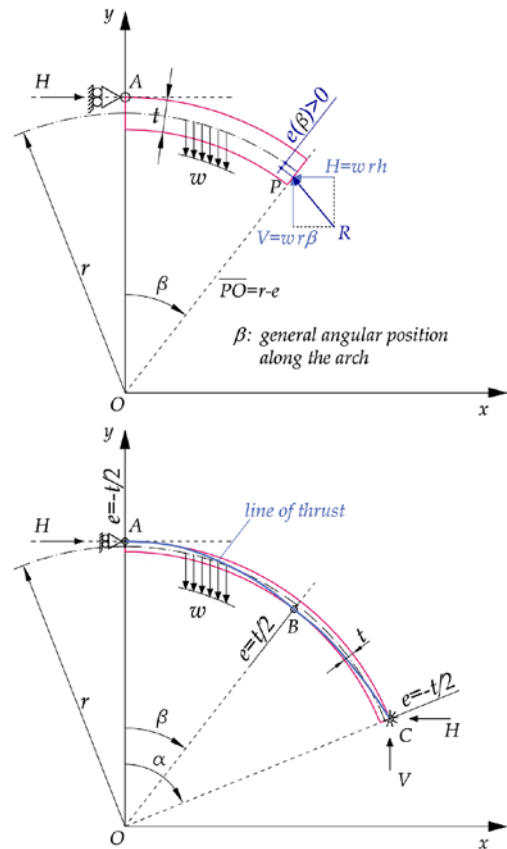


図-11 CCR の解析の概念図 (CCR の論文の Fig.9, 10)

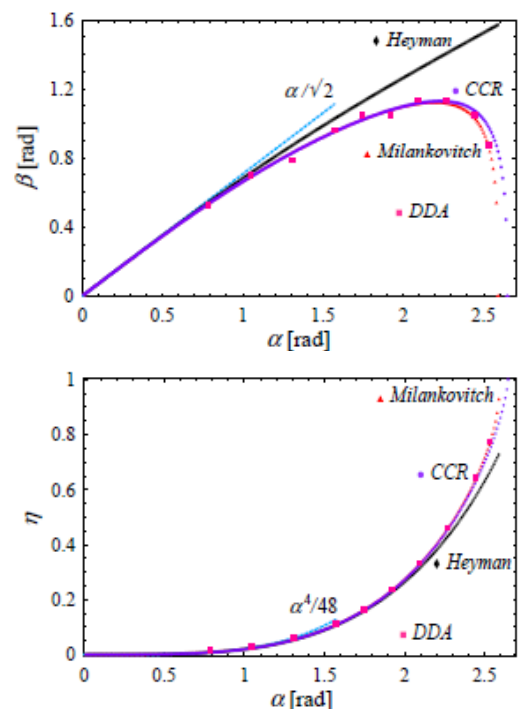


図-12 Heyman, CCR, ミランコビッチ理論及び DDA 解析結果の比較<sup>9)</sup>(上:破壊角,下:無次元厚さ)

た地球の科学, ニュートンプレス, 2002.

- 2) Milutin Milankovitch : *Kanon der Erdbestrahlung und seine Anwendung auf das Eiszeitenproblem*, Belgrade, Royal Serbian Academy Special Publication, 1941.
- 3) ミルティン・ミランコビッチ (和訳: 柏谷健二他 4名) : *気候変動の天文学理論と氷河時代*, 古今書院, 1992.

- 4) Milutin Milankovitch : *Beitrag zur Theorie der Druckkurven, Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde*, K.K. technische Hochschule, Vienna, 1904.
- 5) Association "Milutin Milankovitch" Belgrade : *Milutin Milankovitch, A Traveler through Distant Worlds and Times*, 2008.
- 6) Foce, F. : Milankovitch's Theorie der Druckkurven: Good mechanics for masonry architecture, *Nexus Network Journal* , Vol.9(2), 185-210, 2007.
- 7) Heyman, J.: *The Stone Skelton - Structural Engineering of Masonry Architecture* -, Cambridge University Press, 1995.
- 8) Cocchetti, G., Colasante, G. and Rizzi, E.: On the analysis of minimum thickness in circular masonry arches, *Applied Mechanics Reviews*, ASME, Vol.64, 050802.1-26, 2011.
- 9) Rizzi, E., Cocchetti, G., Colasante, G. and Rusconi, F.: Analytical and numerical analysis on the collapse mode of circular masonry arches, *Advanced Materials Research*, Vol.133-134, 467-472, 2010.
- 10) Aita, D., Barsotti, R. and Bennati, S.: Equilibrium of pointed, circular and elliptical masonry arches bearing vertical walls, *Journal of Structural Engineering*, Vol.138, No. 7, 880-888, 2012.
- 11) Audenaert, A., Reniers, G., Dullaert, W. and Peremans, H.: Evaluation of the limit load capacity of masonry arch bridges, *WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics*, Issue 4, Volume 4, 137-146, Oct. 2009.

(2014.4.7 受付)

## SOME CONSIDERATIONS ON THE ACHIVEMENTS OF MILANKOVITCH AS A CIVIL ENGINEERING RESEARCHER

Takashi HOSODA, Kiyoshi KISHIDA, Jun SAITO and Hidekazu SHIRAI

Milutin Milankovitch (1879-1958) is well known as a celestial mechanician and a geophysical scientist of Serbia. One of his distinguished achievements is known as "Milankovitch cycle", which indicates the long term climate variability caused by the eccentricity of the Earth's orbit, its axis of rotation and precession of the axis. These academic achievements were compiled into a book titled "Kanon der Erdbestrahlung und seine Anwendung auf das Eiszeitenproblem" published in 1941. These great achievements in the field of Astronomy were done when he worked for University of Belgrade as a Professor of the Department of Applied Mathematics.

On the other hand, he majored in Civil Engineering when he was a student of Vienna University of Technology (Technische Universität Wien). He submitted a thesis on the subject of the theoretical analysis of stone arch structure, "Beitrag zur Theorie der Druckkurven" and obtained Ph.D. in 1904. After graduating the university, he worked for a design and construction company, Baron Pittel in Vienna. During his carrier in Baron Pittel, he was involved in the design and construction of many bridges and civil engineering structures.

In order to make clear the meaning of Milankovitch's achievements in the context of the History of Civil Engineering, his academic achievements as a civil engineering researcher are reviewed and reexamined in this study, reffering to the materials provided by the Milankovitch Association, Belgrade and the papers related to the contents of his PhD thesis.